This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

**Usage guidelines**

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

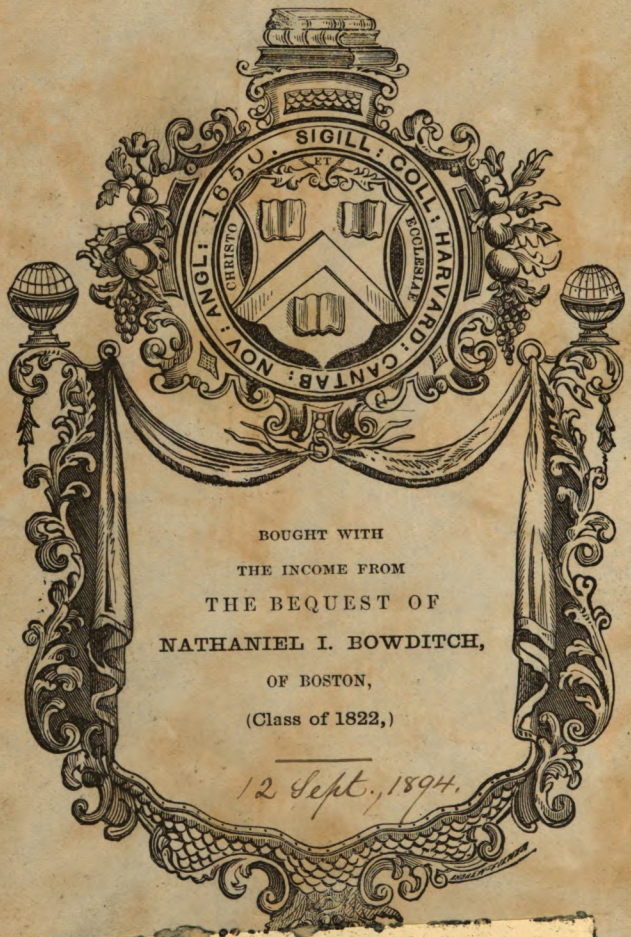
+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.
+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.
+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.
+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

**About Google Book Search**

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Digitized by Google

Math 38893




BOUGHT WITH
THE INCOME FROM
THE BEQUEST OF
NATHANIEL I. BOWDITCH,
OF BOSTON,
(Class of 1822,)

12 Sept., 1894.

SCIENCE CENTER LIBRARY

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

# RECUEIL

DE

# PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES

## CLASSÉS PAR DIVISIONS SCIENTIFIQUES

CONTENANT

LES ÉNONCÉS, AVEC RENVOI AUX SOLUTIONS, DE TOUS LES PROBLÈMES POSÉS DEPUIS L'ORIGINE DANS DIVERS JOURNAUX :

*Nouvelles Annales de Mathématiques,*
*Journal de Mathématiques élémentaires et de Mathématiques spéciales,*
*Mathesis, Nouvelle Correspondance mathématique.*

Digitized by Google

# DIVISION DE L'OUVRAGE.

### A l'usage des classes de Mathématiques élémentaires.

I. — Arithmétique. — Algèbre élémentaire. — Trigonométrie.

II. — Géométrie à deux dimensions. — Géométrie à trois dimensions. — Géométrie descriptive.

### A l'usage des classes de Mathématiques spéciales.

III. — Algèbre. — Théorie des nombres. — Probabilités. — Géométrie de situation.

IV. — Géométrie analytique à deux dimensions (et Géométrie supérieure).

V. — Géométrie analytique à trois dimensions (et Géométrie supérieure).

VI. — Géométrie du triangle.

### A l'usage des candidats à la Licence.

VII. — Calcul infinitésimal et Calcul des fonctions. — Mécanique. — Astronomie.

Digitized by Google

RECUEIL DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES.

V.

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE
# A TROIS DIMENSIONS

## (ET GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE)

A L'USAGE DES CLASSES DE MATHÉMATIQUES SPÉCIALES;

PAR

**C.-A. LAISANT,**

Docteur ès sciences,
Ancien élève de l'École Polytechnique.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

(Tous droits réservés.)

Digitized by Google

~~VI. 8101~~
Math 388.93

HARVARD COLLEGE
SEP 12 1894
LIBRARY.

Bowditch fund.

Digitized by Google

# AVERTISSEMENT.

Les Questions dont on trouvera les énoncés dans cet Ouvrage sont extraites des principaux recueils mathématiques périodiques publiés en langue française depuis la création des *Nouvelles Annales de Mathématiques*, c'est-à-dire depuis 1842. Je n'ai eu d'autre mérite que d'en faire une classification, mais je crois par ce travail de patience avoir rendu un service réel aux professeurs et aux élèves. Ces problèmesreprésentent en quelque sorte le résumé des travaux mathématiques d'un demi-siècle. Presque tous intéressants, quelques-uns sont dus à des Géomètres illustres, et méritent d'attirer l'attention, non seulement en ce qui concerne l'enseignement, mais aussi en ce qui concerne la science pure. Et cependant, épars dans des collections dont quelques-unes sont rares aujourd'hui, ils étaient devenus presque introuvables, surtout pour les élèves.

Autant que possible, j'ai cité les noms des auteurs des questions, et aussi le recueil auquel chacune d'elles est empruntée. En outre, j'ai indiqué les solutions publiées par un système de renvois abréviatifs, afin de permettre, en cherchant dans les collections des bibliothèques, de retrouver une solution qu'on désirerait étudier. On verra ci-dessous l'explication de ces renvois.

Lorsque plusieurs solutions ont été publiées et qu'elles sont également bonnes, le nom indiqué est généralement celui de l'auteur de la première solution.

Quand une question a été généralisée, l'énoncé qu'on trouvera est habituellement celui qui résulte de la généralisation.

Digitized by Google

Quelquefois une note indiquera simplement que la question a été généralisée.

Malgré tout le soin et l'attention que j'ai mis à contrôler et à vérifier la correspondance entre les énoncés et les solutions, quelques erreurs ou quelques doubles emplois ont pu néanmoins subsister. Je m'en excuse d'avance et j'accueillerai avec reconnaissance les rectifications qui me seraient adressées à ce sujet.

Les questions dépourvues d'indications de solutions n'ont pas été résolues, ou du moins je n'en ai pas trouvé de solutions dans les différents recueils où j'ai fait d'attentives recherches. Parmi ces Exercices, il en est un certain nombre dont la difficulté semble expliquer l'absence de solution; nous en avons fait précéder l'énoncé d'un astérisque. Nous avons également marqué d'un astérisque les questions non résolues qui, sans être très difficiles, paraissent présenter un intérêt particulier et méritent de nouvelles recherches.

Je tiens à remercier publiquement ici mon excellent ami, le Commandant Brocard, pour ses conseils précieux et son concours personnel, en vue de la publication de ce Recueil.

C.-A. Laisant.

Nota. — Pour toutes les questions non résolues, je recevrai les solutions que les lecteurs croiraient devoir m'adresser (à la librairie Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins, à Paris), et je me ferai un plaisir de les transmettre aux divers journaux pouvant les insérer.

Les solutions des questions provenant du *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* prendront naturellement place dans le *Journal de Mathématiques élémentaires* ou le *Journal de Mathématiques spéciales,* suivant leur nature. Celles provenant de la *Nouvelle Correspondance mathématique* seront accueillies par la rédaction de *Mathesis*.

Digitized by Google

# ABRÉVIATIONS ET RENVOIS.

N. A. — *Nouvelles Annales de Mathématiques* (depuis 1842, fondation).

N. C. — *Nouvelle Correspondance mathématique* de M. Catalan. (Collection complète en 6 volumes; 1875-80.)

J. M. — *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* de Bourget. (Collection complète en 5 volumes: 1877-1881.)

J. E. — *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps (depuis 1882, continuation du J. M.).

J. S. — *Journal de Mathématiques spéciales* de M. de Longchamps (depuis 1882, continuation du J. M.).

M. — *Mathesis* (depuis 1881, fondation) (1).

L'indication qui suit immédiatement un énoncé comprend le nom de l'auteur en PETITES CAPITALES, le titre du Recueil auquel l'énoncé est emprunté, et le numéro de cette question dans le Recueil. Par exemple,

(CHASLES, N. A., 83)

signifie que la question a été posée par Chasles et qu'elle occupe le n° 83 dans les *Nouvelles Annales*. S'il n'y a pas de nom d'auteur, c'est que celui-ci est resté inconnu, ou que les rédacteurs en ont pris le patronage. L'indication des solutions se trouve au-dessous de l'énoncé et vers la gauche; elle comprend le nom de l'auteur (ou des auteurs) d'une au moins des solutions, en *italiques*, le millésime (réduit aux deux derniers chiffres) de l'année de la publication du

(1) En fait, le journal *Mathesis*, dirigé par MM. Mansion et Neuberg, a recueilli et continué la tradition scientifique de la N. C.

Digitized by Google

tome, en *caractères gras*, et le numéro de la page où l'on peut retrouver la solution. Par exemple, l'indication

(*Jamet*, **78**, 296),

au-dessous d'une question extraite de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, signifie que la solution en a été publiée par M. Jamet dans l'année 1878 du même Recueil, à la page 296.

S'il arrive exceptionnellement qu'une question extraite d'un Recueil ait été résolue dans un autre, l'indication le fera également connaître. Ainsi

(*Brocard*, M., **82**, 248)

au-dessous d'une question extraite de la *Nouvelle Correspondance mathématique*, signifie que la solution en a été publiée par M. Brocard dans *Mathesis*, année 1882, page 248.

Si plusieurs solutions ont été publiées, les renvois le feront connaître; mais on n'indiquera généralement que les noms d'un ou de deux auteurs des solutions.

Digitized by Google

# OBSERVATION SPÉCIALE AU PRÉSENT VOLUME.

On s'étonnera peut-être du nombre relativement faible des énoncés contenus dans ce Volume. Par la nature même des choses, la Géométrie analytique à trois dimensions, restreinte aux proportions habituelles de l'enseignement, présente une moins grande variété de questions que la Géométrie à deux dimensions. D'un autre côté, les compositions écrites d'admission à l'École Polytechnique, depuis un grand nombre d'années, ont porté exclusivement sur des sujets empruntés à la Géométrie à deux dimensions. Il n'est donc pas surprenant que, dans les Recueils périodiques, ce soit cette dernière qui ait pris la place la plus importante.

Il n'en est pas moins intéressant d'avoir un Recueil de problèmes, même en nombre un peu restreint, sur la Géométrie analytique de l'espace. On pourra se convaincre, par la seule lecture de la Table des matières, que ceux-ci présentent une grande variété et s'appliquent à toutes les théories essentielles traitées dans les cours de Mathématiques spéciales. Quelques-uns en dépassent peut-être même un peu les limites; mais, par le caractère des énoncés, ils ne pouvaient guère prendre place dans une autre catégorie; au besoin, le lecteur qui voudrait rigoureusement se borner aux Mathématiques spéciales pourra ne pas s'y arrêter.

La classification ne motive aucune observation particulière. Nous rappellerons seulement qu'elle a été établie en vue de rendre les recherches aussi rapides que possible, et qu'il n'y faut pas chercher un ordre scientifique, à proprement parler.

Digitized by Google

Chacune des sous-divisions contenues dans ce Recueil ne comprend qu'un nombre restreint d'énoncés, condition essentielle pour faciliter l'usage de cette collection d'exercices, et pour donner à l'ensemble la plus grande clarté.

---

NOTA. — Les énoncés que contient ce Volume ont été relevés jusqu'au mois de *Juin* 1892 *inclusivement,* dans les divers Recueils périodiques.

Digitized by Google

RECUEIL DE PROBLÈMES DE MATHÉMATIQUES.

# GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE
# A TROIS DIMENSIONS
## (ET GÉOMÉTRIE SUPÉRIEURE).

## PREMIÈRE PARTIE.

## FIGURES RECTILIGNES OU SPHÉRIQUES.

### FIGURES RECTILIGNES.

#### Points, droites et plans.

1. Quel est le plus court chemin d'un point à un autre, en passant par deux droites situées dans l'espace? (N. A., 17.)

(*Merlieux*, 42, 240.)

2. Soient, dans un même plan,

A, B, C trois points situés sur la droite X,
A′, B′, C′ trois points situés sur la droite X′,
A″, B″, C″ trois points situés sur la droite X″.



Digitized by Google

Formons un système de neuf droites

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{lll} A'A'', & B'B'', & C'C'', \\ A''A, & B''B, & C''C, \\ AA', & BB', & CC', \end{array}\right.$$

où $AA'$ est la droite qui passe par les points $A$ et $A'$, et ainsi des autres.

Formons encore un système de neuf points

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{ll} B'B''.C'C'', & C'C''.A'A'', \\ B''B.C''C, & C''C.A''A, \\ BB'.CC', & CC'.AA', \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{c} A'A''.B'B'', \\ A''A.B''B, \\ AA''.BB, \end{array}$$

où $B'B''.C'C''$ est le point d'intersection des droites $B'B''$ et $C'C''$, ....

Si les points de l'une quelconque des colonnes verticales sont en ligne droite, les points des deux autres lignes verticales sont aussi en ligne droite; les trois droites se rencontrent en un même point, et les trois droites $X'$, $X''$, $X'''$ se rencontrent aussi en un même point. La réciproque a lieu.

Soient, dans un même plan,

$A$, $B$, $C$ trois droites concourant au point $X$,

$A'$, $B'$, $C'$ trois droites concourant au point $X'$,

$A''$, $B''$, $C''$ trois droites concourant au point $X''$.

Formons un système de neuf points, tableau (1), où $A'A''$ est maintenant le point d'intersection des droites $A'$ et $A''$, et ainsi des autres.

Formons encore un système de neuf droites, tableau (2), où $B'B''$, $C'C''$ est maintenant la droite qui passe par les points $B'B''$ et $C'C''$, .... Si les droites de l'une quelconque des colonnes verticales concourent en un même point, il en sera de même des droites des deux autres colonnes verticales; les trois points de

Digitized by Google

concours sont sur une même droite, et les trois points, X, X′, X″ sont aussi sur une même droite. La réciproque a lieu,

Donner une démonstration géométrique sans figures ou une démonstration algébrique sans calculs. (CAYLEY, N. A., **254**.)

(*Claude*, **52**, 274.)

3. $n$ plans sont donnés; par un point fixe C, on mène un plan mobile formant avec le premier plan un angle $\alpha_1$; avec le second un angle $\alpha_2$, ...; avec le $n^{\text{ième}}$ plan un angle $\alpha_n$. On a la relation

$$a_1 \cos\alpha_1 + a_2 \cos\alpha_2 + \ldots + a_n \cos\alpha_n = \text{const.},$$

où $a_1$, $a_2$, ..., $a_n$ sont $n$ quantités données. Le plan mobile engendre un cône droit. A chaque valeur de la constante correspond un autre cône. Tous ces cônes ont même axe. Lorsque le cône se réduit à son axe, la somme $\Sigma_1^n a_p \cos\alpha_p$ est un *minimum;* et lorsque le cône devient un plan, cette somme est un *maximum*. (STEINER, N. A., **274**.)

(*Sacchi*, **53**, 462.)

4. Par un point donné dans un plan, mener dans l'espace trois droites rectangulaires, de telle sorte qu'en prenant sur ces droites, à partir du point donné, des longueurs égales, les projections de ces longueurs sur le plan soient dans des rapports donnés.

Ces axes, ainsi déterminés, tournant autour d'une droite fixe passant par le point donné, trouver les projections de ces axes après une rotation donnée. (N. A., **281**.)

(*Combescure*, **61**, 92.)

*5. Soient donnés : 1° sept points sur une droite A; 2° sept plans dans l'espace. Mener une transversale qui rencontre les sept plans en sept points qui soient homographiques aux sept points de la droite A. (CHASLES, N. A., **305**.)

6. Soient donnés un angle trièdre trirectangle de sommet S et un point quelconque O par lequel on mène un plan P coupant

Digitized by Google

les faces de l'angle suivant ABC; trois parallèles aux côtés du triangle et passant par le point O partagent ce triangle en trois parallélogrammes et trois triangles; $p$, $p'$, $p''$ étant les aires des parallélogrammes, on a

$$\frac{1}{p^2 \sin^2(\mathrm{SA}, \mathrm{P})} + \frac{1}{p'^2 \sin^2(\mathrm{SB}, \mathrm{P})} + \frac{1}{p''^2 \sin^2(\mathrm{SC}, \mathrm{P})} = \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{p''}\right)^2 \frac{1}{\sin^2(\mathrm{SO}, \mathrm{P})};$$

(SA, P) est l'angle de la droite SA et du plan P, $p$ est l'aire du parallélogramme ayant l'un de ses sommets en A; de même $p'$ a un sommet en B et $p''$ en C.

Lorsque le point O est extérieur au triangle ABC, il y a un changement de signes à faire dans le second membre.

(MANNHEIM, N. A., **380**.)

(*Cremona*, **64**, 127.)

7. Soient $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles qu'une droite L fait avec ses projections sur trois plans rectangulaires; $\Delta$ la distance de l'origine à la droite; $a$, $b$, $c$ les distances de cette même origine aux projections de la droite L sur les trois plans coordonnés : on aura

$$\Delta^2 = a^2 \cos^2\alpha + b^2 \cos^2\beta + c^2 \cos^2\gamma.$$ (LOBATTO, N. A., **690**.)

(*Lhopital*, **64**, 386.)

8. En désignant par $x_r$, $y_r$, $z_r$ les coordonnées d'un point $a_r$, on a, pour un point quelconque O,

$$\begin{vmatrix} \overline{\mathrm{O}a_1}^2 & x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ \overline{\mathrm{O}a_2}^2 & x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \overline{\mathrm{O}a_3}^2 & x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ \overline{\mathrm{O}a_4}^2 & x_4 & y_4 & z_4 & 1 \\ \overline{\mathrm{O}a_5}^2 & x_5 & y_5 & z_5 & 1 \end{vmatrix} = \text{const.}$$

Lorsque les points $a_r$ sont sur une sphère, on sait que ce déterminant est nul. (FAURE, N. A., **711**.)

(*Audoynaud*, **65**, 78.)

Digitized by Google

**9.** On donne cinq droites arbitraires; on prend un groupe de quatre de ces droites et l'on construit le couple des deux droites qui les rencontrent. D'un point quelconque de l'espace on mène la droite qui rencontre les deux droites de ce couple.

On pourra ainsi mener de ce point cinq droites, puisqu'il y a autant de couples de deux droites qu'il est possible de former de groupes de quatre droites avec les cinq droites données. Démontrer que les cinq droites ainsi déterminées sont dans un même plan. (MANNHEIM, N. A., 806.)

(*Ed. Weyr,* **70**, 324.)

**10.** Démontrer directement la propriété corrélative de celle qui est exprimée dans la question précédente.

(MANNHEIM, N. A., 807.)

(*Ed. Weyr,* **70**, 325.)

**11.** Démontrer que la distance $\delta$ d'un point $(x, y, z)$ à une droite $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ est donnée, dans un système de coordonnées obliques quelconque, par la formule

$$\begin{aligned}\rho^2\delta^2 = {} & (bz - cy)^2 \sin^2 yz + (cx - az)^2 \sin^2 zx + (ay - bx)^2 \sin^2 xy \\ & + 2(bz - cy)(cx - az)(\cos yz \cos zx - \cos xy) \\ & + 2(cx - az)(ay - bx)(\cos zx \cos xy - \cos yz) \\ & + 2(ay - bx)(bz - cy)(\cos xy \cos yz - \cos zx),\end{aligned}$$

en posant

$$\rho^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2bc \cos yz + 2ac \cos xz + 2ab \cos xy.$$

(HOUSEL, N. A., 855.)

(*Launoy,* **74**, 240.)

**12.** Si l'on fait sur un plan B la perspective d'une figure tracée sur un plan A, il y a sur ces deux plans deux points correspondants $b$ et $a$, tels que tout segment de la figure B est vu du point $b$ sous le même angle que le segment correspondant de la figure A du point $a$. (TRANSON, N. A., 930.)

(*Cahen,* **69**, 426.)

Digitized by Google

**13.** On donne quatre points $a$, $b$, $c$, $d$ dans un plan, et deux points $\rho$, $\rho'$, non situés dans ce plan.

Les droites d'intersection de deux couples de plans $(\rho ab)$, $(\rho' cd)$ et $(\rho cd)$, $(\rho' ab)$ sont dans un même plan (P); on peut obtenir six plans analogues en combinant de toutes les manières possibles les points $a$, $b$, $c$, $d$; ces six plans se coupent suivant une même droite (D) qui rencontre $\rho\rho'$. (GENTY, N. A., **1275**.)

(*Genese*, **81**, 175.)

**14.** Soient $OA = OB = OC$ trois longueurs égales portées sur trois axes rectangulaires; $A_1$, $B_1$, $C_1$ les projections orthogonales des points A, B, C sur un plan quelconque passant par le point O.

Si l'on pose

$$OA_1 = a, \qquad OB_1 = b, \qquad OC_1 = c,$$

$$\widehat{B_1OC_1} = \alpha, \qquad \widehat{C_1OA_1} = \beta, \qquad \widehat{A_1OB_1} = \gamma,$$

on aura

$$\frac{a^2}{\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{b^2}{\sin\beta\cos\beta} = \frac{c^2}{\sin\gamma\cos\gamma} = l^2;$$

$$AA_1 = \frac{a}{\cos\alpha}\sqrt{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

$$BB_1 = \frac{b}{\cos\beta}\sqrt{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma},$$

$$CC_1 = \frac{c}{\cos\gamma}\sqrt{-\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma};$$

$$OA = OB = OC = l\sqrt{\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma}.$$

Discuter les formules. (GENTY, N. A., **1368**.)

(*Pisani*, **82**, 371.)

**15.** Considérons $n$ points $A_1, \ldots, A_r, \ldots, A_s, \ldots, A_n (n > 4)$, situés d'une manière quelconque dans l'espace : soit $a_{rs}$ la dis-

Digitized by Google

tance de deux de ces points $A_r$, $A_s$. Les $\frac{n(n-1)}{2}$ distances $a_{rs}$ satisfont à la relation

$$0 = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & a_{12}^2 & \dots & a_{1n}^2 \\ 1 & a_{21}^2 & 0 & \dots & a_{2n}^2 \\ \cdot & \dots & \cdot & \dots & \dots \\ 1 & a_{n1}^2 & a_{n2}^2 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

(TRZASKA, N. C., 201.)

(*Even*, **77**, 91.)

**16.** Connaissant les angles $\alpha$, $\beta$, $\alpha'$, $\beta'$ des traces de deux plans avec la ligne de terre, calculer l'angle $x$ de ces plans.

(BOUTIN, J. S., 201.)

## Polyèdres.

**17.** Soient donnés un tétraèdre quelconque *abcd* et dans son intérieur un point *o*, tel que les droites *oa*, *ob*, *oc* déterminent un angle trirectangle; je prolonge les droites *oa*, *ob*, *oc*, *od* jusqu'en $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, où elles coupent les faces opposées aux points *a*, *b*, *c*, *d*. On a

$$\frac{1}{\left(\frac{1}{oa}+\frac{1}{oa'}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{ob}+\frac{1}{ob'}\right)^2}+\frac{1}{\left(\frac{1}{oc}+\frac{1}{oc'}\right)^2}=\frac{1}{\left(\frac{1}{od}+\frac{1}{od'}\right)^2}.$$

(MANNHEIM, N. A., 398.)

(**65**, 76.)

*18. Les données restant les mêmes que dans l'énoncé précédent, je mène par le point *o* des plans parallèles aux faces du tétraèdre; ces plans déterminent dans chaque angle trièdre des parallélépipèdes dont je désigne les volumes par $P_a$, $P_b$, $P_c$, $P_d$. On a

$$\left(\frac{oa}{P_a}\right)^2+\left(\frac{ob}{P_b}\right)^2+\left(\frac{oc}{P_c}\right)^2=\left(\frac{od}{P_d}\right)^2.$$ (MANNHEIM, N. A., 399.)

Digitized by Google

**19.** Soient donnés un point ayant pour coordonnées $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ (axes quelconques $x$, $y$, $z$) et trois plans

$$\frac{Ax}{u} + \frac{By}{u} + \frac{Cz}{u} + D = 0,$$
$$\frac{A'x}{u} + \frac{B'y}{u} + \frac{C'z}{u} + D' = 0,$$
$$\frac{A''x}{u} + \frac{B''y}{u} + \frac{C''z}{u} + D'' = 0.$$

$\delta$ et $u$ sont des quantités quelconques. Menant par le point trois plans respectivement parallèles aux trois plans, on forme un parallélépipède dont on demande de trouver les arêtes en fonction de $\frac{\alpha}{\delta}$, $\frac{\beta}{\delta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ et $u$. (N. A., **604**.)

**20.** Deux tétraèdres $abcd$, $a'b'c'd'$ étant donnés, désignons par $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$, $\alpha_4$ les volumes des tétraèdres que l'on obtient en joignant le sommet $a$ aux sommets $a'$, $b'$, $c'$, $d'$; par $\beta_1$, $\beta_2$, $\beta_3$, $\beta_4$ les volumes des tétraèdres que l'on obtient en joignant le sommet $b$ aux sommets $a'$, $b'$, $c'$, $d'$, ...; on aura la relation

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \gamma_4 \\ \delta_1 & \delta_2 & \delta_3 & \delta_4 \end{vmatrix} = abcd \times \overline{a'b'c'd'}^3.$$

(FAURE, N. A., **669**.)

(*Godart*, **64**, 322.)

**21.** On donne un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ et un point O. Désignant par $V_1$ le volume $OA_2A_3A_4$, par $V_2$ le volume $OA_1A_3A_4$, ..., on aura la relation

$$\Sigma\,\overline{OA_1}^2 . V_1^2 + 2\,\Sigma\,\overline{OA_2} . \overline{OA_3} \cos \widehat{A_2OA_3} . V_2V_3 = 0.$$

Les volumes $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ doivent être affectés d'un signe tel, que leur somme soit égale au volume du tétraèdre donné.

(FAURE, N. A., **990**.)

(*Padova, d'Ovidio*, **72**, 86, 183.)

Digitized by Google

*22. Le volume du tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$, qui a pour sommets les pieds des hauteurs d'un tétraèdre donné ABCD, a pour expression

$$V \times \begin{vmatrix} 0 & \cos\eta & \cos\varepsilon & \cos\alpha \\ \cos\eta & 0 & \cos\delta & \cos\beta \\ \cos\varepsilon & \cos\delta & 0 & \cos\gamma \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma & 0 \end{vmatrix},$$

en appelant V le volume du tétraèdre donné et $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\varepsilon$ et $\eta$ les angles dièdres de ce tétraèdre le long des arêtes BC, CA, AB, DA, DB et DC respectivement. (GENTY, N. A., **1355**.)

23. Si des parallèles menées par les sommets d'un tétraèdre ABCD rencontrent les faces opposées aux points *a*, *b*, *c*, *d*, le volume du tétraèdre *abcd* est triple de celui de ABCD.

(MALET, M., **429**.)

(*Mosnat*, **90**, 253.)

---

## FIGURES SPHÉRIQUES.

### Géométrie sphérique.

24. Un hexagone sphérique étant inscrit dans une courbe cono-sphérique, l'intersection des côtés opposés donne six points situés sur le même grand cercle. (N. A., **116**.)

(*Brocard*, **74**, 337.)

25. Un hexagone sphérique étant circonscrit à une courbe cono-sphérique, les trois grands cercles qui passent par les sommets opposés ont le même diamètre en commun.

On appelle *cono-sphérique* la ligne d'intersection d'une sphère et d'un cône du second degré, concentriques. (N. A., **117**.)

(*Brocard*, **74**, 337.)

26. Trouver en coordonnées polaires sphériques le lieu d'un point P sur la surface d'une sphère, tel que si l'on mène de là des arcs de grands cercles aux sommets $V_1$, $V_2$, ..., $V_n$ d'un

Digitized by Google

polygone régulier sphérique, inscrit dans un petit cercle donné, la somme des angles $PV_1V_2$, $PV_2V_3$, ..., $PV_nV_1$ soit constante. (STREBOR, N. A., **153**.)

(*Faure*, **60**, 421.)

27. Si l'on substitue, dans l'équation polaire d'une droite, $r^2$ au lieu du rayon vecteur $r$, et $2\omega$ au lieu de l'angle polaire $\omega$, on obtiendra l'équation d'une hyperbole équilatère. D'une manière analogue, en substituant $\sqrt{-1}(\operatorname{tang}\frac{1}{2}r)^2$ pour $\operatorname{tang}\frac{1}{2}r$, et $2\omega$ pour $\omega$, dans l'équation polaire sphérique d'un grand cercle, et en changeant les constantes de manière que les imaginaires disparaissent, on tombera sur l'équation d'une hyperbole équilatère sphérique [1]. (STREBOR, N. A., **190**.)

(*Dupain*, **60**, 315.)

28. Soient PT une courbe sphérique, O un point fixe sur la sphère, et PQ un grand cercle tangent à la courbe en P. Menons un grand cercle par O faisant avec OP un angle POR, complément de OPQ; abaissons de M, milieu de OP, un arc MN perpendiculaire à OR, et prenons le point R de manière que OR soit divisé en parties égales en N. Le grand cercle RS, tangent à la courbe, lieu de R, fera avec OR un angle ORS égal à OPQ.

*Remarque*. En faisant dériver d'une courbe donnée quelconque une série de courbes se succédant d'après la loi indiquée, le théorème qu'on vient d'énoncer nous fournira une formule pour la rectification d'une quelconque des courbes de cette série. (STREBOR, N. A., **205**.)

(*Faure*, **54**, 372.)

29. Si l'on substitue $r^2$ au lieu du rayon vecteur $r$, et $2\omega$ au lieu de l'angle polaire $\omega$, il est évident qu'on transformera l'équation d'une section conique, rapportée au foyer, dans celle d'une autre, rapportée au centre.

---

[1] L'énoncé semble devoir être modifié. M. Dupain, dans la solution indiquée, a montré comment. Mais on n'aurait pu introduire ici la rectification qu'en reproduisant la solution elle-même.

Digitized by Google

La substitution correspondante, dans la Géométrie sphérique, consiste à mettre dans l'équation d'une courbe, entre les coordonnées polaires sphériques $\rho$ et $\omega$, $\sqrt{-1}\,(\tang \frac{1}{2}\rho)^2$ au lieu de $\tang \frac{1}{2}\rho$, et $2\omega$ pour $\omega$.

D'après cette transformation, l'équation d'une sphéro-conique, rapportée au foyer, deviendra celle d'une autre, rapportée au centre.

On sait aussi qu'un cercle, par la substitution dont il s'agit, sera transformé dans une cassinoïde, l'origine étant un point différent du centre. D'une manière analogue, un petit cercle sur la surface d'une sphère sera transformé par notre formule dans une cassinoïde sphérique. (STREBOR, N. A., 218.)

(*Combescure*, **54**, 270.)

**30.** Mener par un point donné dans un angle sphérique un arc de grand cercle tel, que le rapport des sinus des deux segments soit égal à une quantité donnée. (N. A., 312.)

(*Combescure*, **57**, 253.)

**31.** Étant donnée une courbe quelconque sur une sphère, si d'un point O de la sphère on mène l'arc de grand cercle OA coupant en A la courbe, et qu'on prolonge OA en A′ de manière qu'on ait $\dfrac{\sin\frac{OA'}{2}}{\sin\frac{OA}{2}} = m$, le lieu du point A′ sera une seconde courbe qu'on peut appeler *courbe semblable à la première*. Démontrer que les surfaces déterminées par ces deux courbes sont entre elles comme $m^2$ est à 1. (VANNSON, N. A., 680.)

(*Laisant*, **64**, 235.)

**32.** Dans un quadrilatère sphérique, deux côtés opposés sont fixes de directions et variables de grandeur, et les deux autres sont variables de directions, mais ils ont une grandeur constante égale à $\frac{\pi}{2}$. Trouver le lieu du point de rencontre des diagonales.

(BOURGUET, N. A., 1138.)

(*De Lavison*, **74**, 343.)

Digitized by Google

33. On considère tous les triangles sphériques ABC, inscrits à un même petit cercle, ayant un sommet fixe A et dans lesquels la somme $\cos AB + \cos AC$ a une valeur constante. Démontrer : 1° que le point de rencontre des médianes décrit un grand cercle; 2° que la base BC enveloppe une ellipse sphérique.

(DÉPREZ, M., **705**.)

(*Sollertinsky*, **91**, 149.)

## Sphère; questions diverses.

34. Soient une sphère et deux points quelconques dans l'espace; les distances des points au centre de la sphère sont entre elles comme les distances respectives de chacun de ces points au plan polaire de l'autre point; plans polaires pris par rapport à la sphère. (SALMON, N. A., **229**.)

(*Estienne*, **50**, 431.)

35. $A_1$, $A_2$, $A_3$, $A_4$, $A_5$, M sont dix points situés sur une sphère :

$d_1$ = distance rectiligne de $A_1$ à M,
$d_2$ = » $A_2$ à M,
$d_3$ = » $A_3$ à M; etc.;

$v_1$ = volume du tétraèdre $A_2A_3A_4A_5$,
$v_2$ = » $A_1A_3A_4A_5$,
$v_3$ = » $A_1A_2A_4A_5$,
$v_4$ = » $A_1A_2A_3A_5$,
$v_5$ = » $A_1A_2A_5A_4$.

On a la relation analytique

$$v_1 d_1 + v_2 d_2 + v_3 d_3 + v_4 d_4 + v_5 d_5 = 0 \text{ (1)}.$$

(LUCHTERHAND, N. A., **267**.)

(*Brioschi, Genocchi*, **53**, 167; **54**, 429.)

---

(1) Énoncé inexact. Nous l'avons conservé, parce que cette question a provoqué la publication des articles fort intéressants de MM. Brioschi et Genocchi, auxquels nous renvoyons.

Digitized by Google

36. Démontrer que l'équation de la sphère circonscrite à un tétraèdre est

$$\sum \frac{\alpha\beta \sin(\gamma, \delta) \sin(\alpha\gamma, \beta\gamma) \sin(\alpha\delta, \beta\delta)}{\sin(\alpha, \beta)} = 0;$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ sont les premiers membres des équations des faces mises sous la forme

$$x \cos a + y \cos a' + z \cos a'' - p = 0.$$

$(\gamma, \delta)$ représente l'angle que fait la face $\gamma$ avec la face $\delta$; $(\alpha\gamma, \beta\gamma)$ l'angle que fait l'intersection des faces $\alpha$ et $\gamma$ avec l'intersection des faces $\beta$ et $\gamma$. (PROUHET, N. A., 464.)

(*Cremona*, **60**, 149.)

37. On donne dans l'espace deux droites indéfinies L, L', non situées dans un même plan, et un point O : décrire de ce point comme centre une sphère qui coupe les droites L, L' en des points A, B, A', B', tels que le tétraèdre ABA'B', qui a ces points d'intersection pour sommets, soit équivalent à un cube donné $c^3$. (N. A., 713.)

(*Drouard*, **65**, 85.)

38. Si, sur une sphère dont le rayon est pris pour unité, on trace une courbe quelconque, on a, entre les coordonnées $x, y, z$ de tout point de cette ligne, la relation

$$\begin{aligned}(x'^2 + y'^2 + z'^2)[(xy'' - yx'')^2 + (yz'' - zy'')^2 + (zx'' - xy'')^2] \\ = (x'x'' + y'y'' + z'z'')^2 \\ + [x(y'z'' - z'y'') + y(z'x'' - x'z'') + z(x'y'' - y'x'')]^2,\end{aligned}$$

dans laquelle les accents des dérivées sont relatifs à une variable indépendante $t$ [1]. (CATALAN, N. A., 1124.)

*Remarque.* — Cette identité peut servir à trouver une infi-

---

[1] *Voir*, N. A., **65**, 48, une relation analogue à celle-ci.

Digitized by Google

nité de solutions de l'équation indéterminée

$$(P^2 + Q^2 + R^2)(X^2 + Y^2 + Z^2) = U^2 + V^2.$$

On en conclut, par exemple

$$(24^2 + 7^2 + 15^2)(30^2 + 36^2 + 23^2) = 375^2 + 1475^2.$$

(*Note de la Rédaction.*)

(*Moret-Blanc,* **74**, 338.)

**39.** Étant donné un ensemble de sphères ayant un axe radical commun, on les coupe par une de leurs sphères orthogonales, et l'on prend les circonférences obtenues comme bases d'autant de cônes ayant pour sommet commun un point de l'axe radical. Chacun de ces cônes coupe la sphère correspondante suivant une deuxième circonférence : toutes ces circonférences sont situées sur une même sphère orthogonale aux sphères données. Réciproque. (Fouret, N. A., **1160.**)

(*Moret-Blanc,* **75**, 429.)

***40.** Trouver l'équation de la sphère qui passe par quatre des huit points d'intersection de quatre sphères quelconques.

(E. Lucas, N. C., 94.)

**41.** Si les trois diagonales d'un octaèdre se coupent à angle droit, en un même point, les pieds des perpendiculaires abaissées de ce point, sur les huit faces, seront sur une même sphère.

(Steiner, N. C., **188.**)

(*Freson,* **77**, 89, 210.)

**42.** Étant données trois sphères, on peut mener huit plans tangents communs, deux extérieurs, six intérieurs. La somme algébrique des distances d'un point quelconque aux deux plans extérieurs est égale à la somme algébrique des distances de ce point aux six plans intérieurs. (Stoll, N. C., **287.**)

(*Freson,* **77**, 427.)

**43.** Aux faces ABC, ACD, ADB d'un tétraèdre ABCD, on cir-

Digitized by Google

conscrit trois sphères égales. Démontrer que les plans tangents aux points diamétralement opposés à A se coupent sur la corde commune aux trois sphères. (FARISANO, M., 495.)

(*Beyens*, **86**, 233.)

**44**. On donne une sphère de rayon R, rapportée à trois diamètres rectangulaires. On considère la section ZOX et l'on suppose que celle-ci tourne autour de OZ d'un mouvement uniforme, pendant que le rayon OA de cette section, partant de la position OX, se déplace autour de O avec la même vitesse. Étudier la courbe ainsi décrite sur la sphère par le point A.

(BROCARD, M., 758.)

(*Mandart*, **92**, 211.)

Digitized by Google

## DEUXIÈME PARTIE.

# COURBES ET SURFACES DU SECOND ORDRE.

### CONIQUES DANS L'ESPACE.

**45.** Si l'on coupe par un plan deux angles solides trirectangles ayant même sommet, les six points d'intersection des arêtes avec le plan sont sur une même conique. (STEINER, N. A., **219**.)

(**50**, 206, 212.)

**46.** Mêmes données qu'à l'énoncé précédent; les six faces des deux angles solides touchent un même cône du second degré. (STEINER, N. A., **220**.)

(**50**, 206, 212.)

**47.** Soient

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

$$lx + my + nz = 0,$$

les équations d'une ellipse dans l'espace; les axes principaux de cette ellipse sont les racines de l'équation

$$\frac{l^2 a^2}{z^2 - a^2} + \frac{m^2 b^2}{z^2 - b^2} + \frac{n^2 c^2}{z^2 - c^2} = 0. \quad \text{(S. TAYLOR, N. A., 575.)}$$

(*Kessler*, **61**, 268.)

**48.** Si l'on appelle E et F les axes d'une ellipse, $e$, $f$, $e'$, $f'$,

Digitized by Google

$e''$, $f''$ les axes de ses projections sur trois plans rectangulaires, on a

$$2E^2 + 2F^2 = e^2 + f^2 + e'^2 + f'^2 + e''^2 + f''^2,$$
$$E^2F^2 = e^2f^2 + e'^2f'^2 + e''^2f''^2.$$

(PROUHET, N. A., 634.)

(*Ylliac*, **63**, 105.)

*49. Les directions des axes de la section faite par le plan

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = \lambda,$$

dans la surface

$$\begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx \\ &\quad + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \end{aligned}$$

sont données par les intersections du plan

$$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma = 0$$

avec le cône

$$\begin{aligned} &(A\cos^2\beta + A'\cos^2\alpha - 2B''\cos\alpha\cos\beta)(x^2\sin^2\beta - y^2\sin^2\alpha) \\ &\quad + (A\cos^2\gamma + A''\cos^2 A - 2B'\cos\alpha\cos\gamma)(z^2\sin^2\alpha - x^2\sin^2\gamma) \\ &\quad + (A'\cos^2\gamma + A''\cos^2\beta - 2B\cos\beta\cos\gamma)(y^2\sin^2\gamma - z^2\sin^2\beta) = 0. \end{aligned}$$

(MATHIEU, N. A., 729.)

50. Étant donnée l'équation générale d'une surface du second ordre

$$(1) \qquad \left\{ \begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz \\ &\quad + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0, \end{aligned} \right.$$

rapportée à des axes rectangulaires; si l'on coupe cette surface par un plan

$$(2) \qquad \alpha x + \beta y + \gamma z - q = 0,$$

$\alpha$, $\beta$, $\gamma$ étant les cosinus de l'axe du plan avec les axes de coordonnées, les valeurs algébriques $R_1$, $R_2$ des *axes de la section*



Digitized by Google

seront données par les deux équations

$$(3)\quad \begin{cases} \dfrac{1}{R_1^2}+\dfrac{1}{R_2^2}=\dfrac{\dfrac{dH}{dD}}{H}\left[A\alpha^2+A'\beta^2+A''\gamma^2+2B\beta\gamma+2B'\alpha\gamma+2B''\alpha\beta-A-A'-A''\right], \\ \dfrac{1}{R_1^2R_2^2}=-\dfrac{\left(\dfrac{dH}{dD}\right)^3}{H^2}. \end{cases}$$

Dans ces équations, H désigne le déterminant

$$(4)\quad \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C & \alpha \\ B'' & A' & B & C' & \beta \\ B' & B & A'' & C'' & \gamma \\ C & C' & C'' & D & -q \\ \alpha & \beta & \gamma & -q & 0 \end{vmatrix}.$$

(PAINVIN, N. A., **824**.)

(*Maffiotti*, **68**, 91.)

**51.** Étant données deux équations

$$f(x, z)=0, \qquad \varphi(y, z)=0;$$

trouver quelles relations doivent exister entre les coefficients, pour que ces équations représentent un cercle.

En supposant que ces relations existent, déterminer le centre de ce cercle, la direction de son plan, la longueur de son rayon.

Application numérique :

$$25y^2+24zx+153z^2-76y+258z-695=0,$$
$$25x^2+72xz+160z^2+22x+248z-1487=0.$$

(DUPAIN, N. A., **926**.)

(*Saltel*, **71**, 278) (1).

**52.** Trouver les points de l'espace tels, qu'une conique donnée

(1) Généralisation.

Digitized by Google

se projette suivant un cercle ayant pour centre la projection d'un point donné sur le plan de la conique [1].

(PELLET, N. A., 1176.)

(*Moret-Blanc,* 75, 653.)

53. Trouver une circonférence qui rencontre cinq droites données, parallèles entre elles, et non situées dans un même plan [2]. (CATALAN, N. C., 25.)

(*Van Aubel,* 77, 49.)

*54. Étant donnée une ellipse E, trouver dans l'espace tous les couples de droites $\Delta$, $\Delta'$, tels qu'il existe un rapport constant K entre les distances d'un point quelconque de E à $\Delta$ et $\Delta'$.

(NEUBERG, J. S., 307.)

---

## CONES ET CYLINDRES.

55. Faire passer, par cinq points donnés dans l'espace, un cylindre droit à base circulaire [3]. (N. A., 132.)

56. Un cône du second degré étant coupé par un plan perpendiculaire à un plan principal, concevons une sphère concentrique au cône et touchant le plan coupant; le plan tangent à la sphère, mené perpendiculairement au plan principal, coupe celui-ci suivant une droite dont la partie interceptée dans le cône est égale au paramètre de la section conique.

(JACQUES BERNOULLI, N. A., 142.)

(*Brocard,* 75, 332.)

57. Étant donnés deux cônes de révolution autour du même axe, un plan tangent au premier cône coupe le second cône

---

(1) Il s'agit, bien entendu, d'une projection conique, et les points de l'espace dont il est question sont les sommets des cônes de projection.

(2) *Voir* N. A., question 132 (n° 55 ci-après).

(3) *Voir* ci-dessus, n° 53.

Digitized by Google

suivant une conique, et un plan tangent au second cône coupe le premier cône suivant une seconde conique. Une de ces coniques est égale à la *focale* de l'autre conique.

On nomme *focale* d'une conique le lieu géométrique de ses foyers situé dans l'espace. (DIEU, N. A., **253**.)

(*Thiollier, Painvin,* **52**. 328.)

**58.** Étant donnés un cône du second degré et un point fixe dans l'intérieur du cône, mener par ce point un plan tel que la section ait le point fixe pour foyer.

(YVON VILLARCEAU, N. A., 268.)

(*Sacchi,* **53**, 222.)

**59.** Les équations tangentielles d'un cône droit touchant trois plans donnés $(u_1, v_1, w_1)$, $(u_2, v_2, w_2)$, $(u_3, v_3, w_3)$ sont, dans le cas des axes rectangulaires,

$$\begin{vmatrix} u & v & w & 1 \\ u_1 & v_1 & w_1 & 1 \\ u_2 & v_2 & w_2 & 1 \\ u_3 & v_3 & w_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad \begin{vmatrix} u & v & w & \sqrt{u^2+v^2+w^2} \\ u_1 & v_1 & w_1 & \sqrt{u_1^2+v_1^2+w_1^2} \\ u_2 & v_2 & w_2 & \sqrt{u_2^2+v_2^2+w_2^2} \\ u_3 & v_3 & w_3 & \sqrt{u_3^2+v_3^2+w_3^2} \end{vmatrix} = 0;$$

les signes des radicaux sont indépendants; il y a quatre solutions. (PAINVIN, N. A., **1003**.)

(*Moret-Blanc,* **72**, 334.)

**60.** On donne un tétraèdre ABCD et deux points E, F; on construit deux autres tétraèdres EABC, FABC. Les faces de FABC coupent les arêtes de EABC aux points G, H, I. On détermine sur ces mêmes arêtes trois autres points K, L, M tels, qu'on ait

$$\frac{EG}{EK} : \frac{AG}{AK} = \frac{EH}{EL} : \frac{BH}{BL} = \frac{EI}{EM} : \frac{CI}{CM} = \frac{1}{2}.$$

Prouver :

1° Que les quatre plans analogues à KLM passent par un même point;

2° Que ce point décrit un plan tangent au cône passant par

Digitized by Google

les cinq droites EA, EB, ..., le long de la génératrice EF, lorsque les cinq points A, B, C, D, F décrivent arbitrairement ces mêmes droites. (BOURGUET, N. A., 1236.)

61. Si $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ sont les angles de trois couples de génératrices principales (situés dans les trois plans principaux) d'un cône du second degré, on a l'équation

$$\cos\varphi_1 \cos\varphi_2 + \cos\varphi_2 \cos\varphi_3 + \cos\varphi_3 \cos\varphi_1 + 1 = 0.$$

Un des trois angles est toujours imaginaire.

(ED. WEYR, N. C., 206.)

(*Freson*, **77**, 421.)

62. Étudier les diverses surfaces que représente l'équation

$$ax^2 + by^2 - z^2 - axz - byz + xy = 0,$$

lorsqu'on donne à $a$ et à $b$ toutes les valeurs possibles.

(BROCARD, N. C., 260.)

63. Soient S le sommet d'un cône droit, O le point où l'axe rencontre un point quelconque P. Démontrer qu'il existe un rapport constant entre les distances des points O et S à une tangente quelconque de la section du cône par le plan P.

(J. NEUBERG, J. S., 217.)

(*Leinekugel*, **90**, 235.)

---

## UN ELLIPSOÏDE.

64. Par les trois extrémités des axes principaux d'un ellipsoïde, on mène trois cordes parallèles; on projette chacune de ces cordes sur l'axe d'où elle part; on divise cette projection par l'axe sur lequel elle se trouve; la somme des trois quotients est constante. (N. A., 510.)

(*Farjon*, **61**, 51.)

65. Étant donné un tétraèdre quelconque, on peut faire passer

Digitized by Google

par les centres de gravité des quatre faces un ellipsoïde tangent à ces mêmes faces. Il aura pour centre le centre de gravité du tétraèdre. Et, si l'on appelle $3a$, $3b$, $3c$ les arêtes adjacentes à un même angle solide, qu'on prenne des axes parallèles à ces arêtes et pour origine le centre de gravité du tétraèdre, l'équation de la surface tangente sera

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2+\left(\frac{y}{b}\right)^2+\left(\frac{z}{c}\right)^2+\frac{ay}{ab}+\frac{xz}{ac}+\frac{yz}{bc}=\frac{3}{8}.$$

(VANNSON, N. A., **628**.)

(*Andlauer*, **63**, 54.)

**66.** En deux points d'un ellipsoïde on mène les normales. Le plan mené par le milieu de la corde et perpendiculairement à cette corde passe par les milieux des lignes qui joignent les points de rencontre des normales avec chacun des plans de symétrie.

(LAGUERRE, N. A., **956**.)

(*Cohen, Bellavitis*, **69**, 524; **70**, 34, 142.)

***67.** Il y a la même relation entre les tangentes menées d'un point de l'ellipsoïde à trois sphères doublement tangentes à l'ellipsoïde qu'entre les distances d'un point variable dans un plan à trois points de ce plan. (DARBOUX, N. A., **1035**.)

**68.** Par le centre d'un ellipsoïde on mène trois plans rectangulaires quelconques A, B, C; si l'on nomme $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles que forment ces plans avec un plan diamétral fixe P; $a$, $b$ les axes de la section de la surface par le plan P; $a_1$, $b_1$, $c_1$ les demi-diamètres de cette section dirigés suivant les droites (A, P) (B, P), (C, P), on aura

$$\frac{\sin^2\alpha}{a_1^2}+\frac{\sin^2\beta}{b_1^2}+\frac{\sin^2\gamma}{c_1^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}.$$ (GENTY, N. A., **1369**.)

(*Moret-Blanc*, **82**, 422.)

***69.** En chacun des points d'un ellipsoïde, on mène le plan tangent. On projette sur ce plan le diamètre issu du point de

Digitized by Google

contact. Démontrer que ces projections, déjà tangentes à l'ellipsoïde, sont tangentes, en outre, à une seconde surface.

(MANNHEIM, N. A., 1563.)

70. Un ellipsoïde étant donné, on prend pour tableau un plan diamétral AOB et, pour point de vue, une extrémité C du diamètre conjugué de AOB. Cela posé, les perspectives de toutes les coniques tracées sur l'ellipsoïde sont semblables à la section diamétrale AOB.

*Corollaire.* — Si AOB est une section circulaire, auquel cas C est un ombilic, les perspectives de toutes les coniques tracées sur l'ellipsoïde sont des cercles. (N. C., 4.)

(**75**, 72, 186.)

71. Les mêmes choses étant posées que dans le corollaire de l'énoncé précédent, soit D une droite quelconque, et soit D′ la droite conjuguée de D′ [1]. Soient E les ellipses dont les plans passent par D, et E′ les ellipses dont les plans passent par D′; soient enfin C les perspectives des ellipses E, et C′ les perspectives des E′ : ces deux séries de cercles forment un système orthogonal. (CATALAN, N. C., 5.)

(**75**, 72, 186.)

72. Un ellipsoïde est coupé par un plan P parallèle à un plan principal Q suivant une ellipse E. Par tous les points de cette courbe, on mène des normales à la surface. Démontrer que le volume limité par ces normales et les plans P, Q est dans un rapport constant au volume du cône ayant pour sommet le centre de l'ellipsoïde et pour base la courbe E. (NEUBERG, M., 263.)

(*Bastin,* **84**, 192.)

73. Démontrer que le contour apparent d'un ellipsoïde de

---

[1] Deux droites D, D′ sont dites conjuguées, relativement à une surface du deuxième ordre, quand le pôle de tout plan passant par l'une est situé sur l'autre. (*Note de M. Catalan.*)

Digitized by Google

révolution allongé, par rapport à un plan quelconque, est une ellipse dont les foyers sont les projections, sur ce plan, des foyers de la section méridienne. (VERSTRAETEN, M., 300.)

(*Barbelenet,* **85**, 63.)

74. Trouver un plan sur lequel la projection orthogonale d'un ellipsoïde donné soit circulaire. (CATALAN, M., 360.)

(*Jamet,* **85**, 187.)

75. Soient OA, OB, OC trois demi-diamètres conjugués quelconques d'un ellipsoïde, et soient OA′, OB′, OC′ les demi-diamètres perpendiculaires aux plans BOC, COA, AOB. Trouver, entre OA′, OB′, OC′ des relations analogues aux théorèmes d'Apollonius. (NEUBERG, M., 411.)

76. Quelle est, parmi les normales à une ellipse donnée, celle qui est la plus éloignée du centre de cette courbe?

Même question pour un ellipsoïde. (MANNHEIM, J. S., 288.)

(*Brocard,* **92**, 42.)

77. On donne un ellipsoïde de centre O, dont les demi-axes sont $a$, $b$, $c$. On prend, sur cette surface, un point $m$ tel que la normale en ce point, à l'ellipsoïde, fasse avec ses axes les angles $\alpha$, $\beta$, $\gamma$. On demande de déterminer, en fonction de $a$, $b$, $c$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ :

1° La distance $d$ de O au plan tangent en $m$ à l'ellipsoïde;

2° La distance $\delta$ de O à la normale en $m$;

3° La longueur $\overline{Om}$;

4° Les angles $\lambda$, $\mu$, $\nu$ de $Om$ avec les axes;

5° La longueur $\overline{mp}$ de la portion de la normale, en $m$, comprise entre ce point et le plan passant par les demi-axes $a$ et $b$.

(SVÉCHNICOFF, J. S., 329.)

Digitized by Google

## PLUS D'UN ELLIPSOÏDE.

**78.** Étant donnés deux ellipsoïdes semblables, concentriques, et ayant leurs axes principaux homologues dans la même direction, tout cylindre circonscrit au petit ellipsoïde coupe le volume du grand dans un rapport simple qu'il s'agit de trouver. (LEBESGUE, N. A., **144**.)

(*De Perrodil*, **47**, 431.)

**79.**

$$(ax+by+cz)^2+(a'x+b'y+c'z)^2+(a''x+b''y+c''z)^2=d^2.$$
$$(ax+a'y+a''z)^2+(bx+b'y+b''z)^2+(cx+c'y+c''z)^2=d^2.$$

Les axes étant rectangulaires, ces deux équations sont celles de deux ellipsoïdes *égaux*. (JACOBI, N. A., **188**.)

(*Loxhay*, **48**, 340.)

**80.** Quand une suite d'ellipsoïdes est inscrite dans un cône de révolution suivant la même courbe de contact, on a, entre leurs demi-axes, $a$, $b$, $c$, la relation suivante

$$\frac{b^3}{\sqrt{(a^2-b^2)(b^2-c^2)}}=\text{const.}$$ (M. ROBERTS, N. A., **238**.)

(*Faure*, **53**, 215.)

**81.**

$$[(b'c'')x+(c'a'')y+(a'b'')z]^2+[(b''c)x+(c''a)y+(a''b)z]^2$$
$$+[(bc')x+(ca')y+(ab')z]^2=k^2,$$
$$[(b'c'')x+(b''c)y+(bc')z]^2+[(c'a'')x+(c''a)y+(ca')z]^2$$
$$+[(a'b'')x+(a''b)y+(ab')z]^2=k^2$$

étant les équations de deux ellipsoïdes (axes rectangulaires), les ellipsoïdes sont égaux. Les crochets désignent des déterminants binaires. (JACOBI, N. A., **278**.)

(*Faure, Brioschi*, **54**, 202; **55**, 170.)

Digitized by Google

**82.** Étant donnés deux ellipsoïdes de même centre, semblables et semblablement placés, on mène, de chaque point de la surface du plus grand, des plans tangents à l'autre : démontrer que l'enveloppe des plans des lignes de contact, ainsi déterminées, est un ellipsoïde semblable aux deux premiers.

(DELORME, N. A., **672**.)

(*Courtin, Godard,* **64**, 74, 76.)

**83.** Ayant posé

$$a_1x + b_1y + c_1z = P_1 \quad a_1x + a_2y + a_3z = Q_1,$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = P_2 \quad b_1x + b_2y + b_3z = Q_2,$$
$$a_3x + b_3y + c_3z = P_3 \quad c_1x + e_2y + c_3z = Q_3,$$

avec

$$\delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix},$$

et supposant d'ailleurs $\delta$ différent de zéro, on demande de démontrer que les deux ellipsoïdes

$$P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 = 1,$$
$$Q_1^2 + Q_2^2 + Q_3^2 = 1$$

sont égaux. (JACOBI, J. S., 16 *bis*.)

(*Toqué,* **83**, 92.)

***84.** Les conditions étant celles de la question précédente, on demande de trouver l'équation du cône contenant les axes des deux surfaces. (J. S., 17.)

---

## HYPERBOLOÏDES.

**85.** Soient un hyperboloïde, son cône asymptotique et un plan principal commun; tout plan tangent à l'hyperboloïde, perpen-

Digitized by Google

diculaire au plan principal, retranche du cône asymptotique un cône fermé, de volume constant; démontrer le théorème général dont celui-ci est un corollaire. (TERQUEM, N. A., 99.)

(*Brocard,* **75**, 66.)

**86.** Les quatre hauteurs d'un tétraèdre sont les éléments rectilignes d'un hyperboloïde à une nappe. (STEINER, N. A., 472.)

(*Bellac,* **59**, 350.)

**87.** Quatre génératrices d'un hyperboloïde étant données, construire le tétraèdre qui a ces quatre droites pour hauteurs. (N. A., 473.)

**88.** On donne un hyperboloïde à une nappe, engendré par la révolution d'une hyperbole équilatère; un cône qui a son sommet sur cette surface et pour base le cercle de gorge est coupé suivant un cercle par un plan perpendiculaire au cercle de gorge. (BÖKLEN, N. A., 481.)

(*Chardonnet,* **59**, 339.)

***89.** Le centre de la sphère circonscrite à un tétraèdre, le centre de l'hyperboloïde passant par les quatre hauteurs, le centre de gravité du tétraèdre, sont trois points en ligne droite. (JOACHIMSTHAL, N. A., 482.)

**90.** Un trièdre trirectangle est circonscrit à une surface du second degré.

Démontrer que les normales à cette surface aux points de contact des faces du trièdre, et le diamètre qui passe par le sommet de ce trièdre, appartiennent à un même hyperboloïde. (MANNHEIM, N. A., 822.)

(*Pellet,* **68**, 331.)

**91.** Les conditions pour que l'hyperboloïde

$$ayz + bzx + cxy + abc = 0$$

Digitized by Google

soit de révolution sont, $\lambda$, $\mu$, $\nu$ étant les angles des axes et $a$, $b$, $c > 0$ :

$$\frac{a}{1-\cos\lambda} = \frac{b}{1-\cos\mu} = \frac{c}{1-\cos\nu}.$$

On propose d'interpréter géométriquement ces relations.

(De Saint-Germain, N. A., **1123**.)

(*Pellissier*, **74**, 491.)

**92.** Deux hyperboloïdes gauches $H_1$, $H_2$ ont une génératrice L commune. Par tout point $m$ de L passent une génératrice $L_1$ de $H_1$ et une génératrice $L_2$ de $H_2$. Comment varie l'angle $\widehat{L_1 L_2}$ quant $m$ parcourt L? (Dewulf, N. A., **1137**.)

(*Moret-Blanc*, **75**, 183.)

***93.** Le parallélépipède construit sur trois génératrices quelconques d'un hyperboloïde à une nappe a un volume constant.

(Genty, N. A., **1531**.)

***94.** Si, par un point fixe P, pris sur un hyperboloïde réglé, l'on mène des droites s'appuyant sur les diagonales des quadrilatères que forment deux génératrices fixes du premier système, avec deux génératrices variables du second système, ces droites sont situées dans un même plan. (Neuberg, N. C., **122**.)

***95.** Soient A, B, C trois génératrices, d'un même système, de l'hyperboloïde H; A′, B′, C′ trois génératrices, d'un même système, de l'hyperboloïde H′; P un point quelconque de l'intersection des surfaces H, H′. Par P on mène les deux droites qui s'appuient, respectivement, sur les couples de droites (A, B′), (A′, B); soit $\gamma$ le plan passant par ces droites. On obtient d'une manière analogue deux autres plans $\alpha$, $\beta$, en combinant, d'une part, les couples (B, C′), (B′, C), et, d'autre part, les couples (A, B′), (A′, B). Les plans $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ passent par une même droite.

(Neuberg, N. C., **123**.)

**96.** Dans un tétraèdre quelconque : 1° les droites qui joignent

Digitized by Google

les sommets aux centres des cercles inscrits dans les faces opposées sont les génératrices d'un même hyperboloïde; 2° celles qui joignent les sommets aux centres des médianes antiparallèles des faces opposées jouissent de la même propriété.

(NEUBERG, M., 254.)

(*Jamet,* **84**, 190.)

**97.** Soient A′, B′, C′, D′ les projections des sommets d'un tétraèdre ABCD sur un plan quelconque. Démontrer que les perpendiculaires abaissées de A′, B′, C′, D′ respectivement sur les plans BCD, CDA, DAB, ABC sont les génératrices d'un même hyperboloïde. (NEUBERG, M., 454.)

(*Van Dorsten,* **88**, 50.)

**98.** En un point P de l'hyperboloïde à une nappe, on mène les deux génératrices; puis par chaque génératrice un plan perpendiculaire au plan tangent en P; ces plans touchent l'hyperboloïde en deux points Q et R; trouver l'équation du plan passant par QR et par le centre de l'hyperboloïde.

(ED. LUCAS, M., 563.)

(*Ed. Lucas,* **88**, 233.)

***99.** Condition pour que les équations de quatre droites représentent des génératrices d'un hyperboloïde.

(LEMOINE, J. S., 109.)

***100.** Soient A′, B′, C′, D′ les projections des sommets d'un tétraèdre ABCD sur un même plan P, et soient $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ les orthocentres des triangles B′C′D′, C′D′A′, D′A′B′, A′B′C′.

Démontrer : 1° que les perpendiculaires abaissées des points A′ et $A_1$ sur le plan BCD, et les six droites homologues, appartiennent à un même hyperboloïde; 2° que les perpendiculaires abaissées du milieu des droites $A'A_1$, $B'B_1$, $C'C_1$, $D'D_1$, sur les faces correspondantes du tétraèdre ABCD, concourent en un même point. (NEUBERG, J. S., 306.)

***101.** Soit $\varphi(x, y, z)$ l'ensemble des termes du second degré

Digitized by Google

dans le premier membre de l'équation d'un hyperboloïde à une nappe. Si l'on désigne par H le discriminant de ce premier membre rendu homogène; par $\gamma$, $\gamma'$, $\gamma''$ et $\Delta$ les mineurs de H qui correspondent respectivement aux demi-coefficients de $x$, $y$, $z$ dans les termes du premier degré, et au terme constant; enfin par $\lambda$, $\mu$, $\nu$ trois paramètres assujettis seulement à la condition $\varphi(\lambda, \mu, \nu) = 0$; les projections, sur les plans coordonnés, des génératrices de la surface appartenant à l'un des deux systèmes auront pour équations

$$\Delta(\nu y - \mu z) + \mu\gamma'' - \nu\gamma' + \tfrac{1}{2}\sqrt{H}\,\varphi'_\lambda = 0,$$
$$\Delta(\lambda z - \nu x) + \nu\gamma - \lambda\gamma'' + \tfrac{1}{2}\sqrt{H}\,\varphi'_\mu = 0,$$
$$\Delta(\mu x - \lambda y) + \lambda\gamma' - \mu\gamma + \tfrac{1}{2}\sqrt{H}\,\varphi'_\nu = 0.$$

En changeant, dans ces équations, le signe de $\sqrt{H}$, on obtiendra celles qui se rapportent à l'autre système de génératrices.

(TISSOT, J. S., 344.)

---

## PARABOLOÏDES.

**102.** Dans le pentaèdre ABCA'B'C', ABC, A'B'C' sont deux faces triangulaires *parallèles;* les faces ABA'B', ACA'C' sont deux faces quadrilatères *planes;* la cinquième face BCB'C' est un paraboloïde décrit par la droite B'C' se mouvant sur les directrices BB', CC' parallèlement aux plans ABC, A'B'C'. On a :

Volume du pentaèdre égale

$$\tfrac{1}{6}\,h \sin \mathrm{BAC}[\mathrm{AB}(\mathrm{AC} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{A'C'}) + \mathrm{A'B'}(\mathrm{A'C'} + \tfrac{1}{2}\,\mathrm{AC})];$$

$h =$ distance des faces ABC, A'B'C'. (MASCHERONI, N. A., 574.)

(*Cuenoud,* **61**, 314.)

**103.** Un tétraèdre *abcd* étant conjugué à un paraboloïde, si l'on désigne par $a'$, $b'$, $c'$ les points où les arêtes $da$, $db$, $dc$ coupent le paraboloïde, on a

$$\left(\frac{da'}{aa'}\right)^2 + \left(\frac{db'}{bb'}\right)^2 + \left(\frac{dc'}{cc'}\right)^2 = 1. \quad \text{(FAURE, N. A., 1093.)}$$

(*Gambey,* **73**, 333.)

Digitized by Google

**104.** Dans un paraboloïde hyperbolique, la génératrice de chaque système qui passe par le sommet est celle sur laquelle les génératrices de l'autre système interceptent les segments les plus petits. (TISSOT, N. A., **1106**.)

(*Jamet*, **74**, 205.)

**105.** Soit $f(x, y, z) = 0$ un paraboloïde; donner l'équation qui détermine les paramètres des paraboles principales.

(J. S., **26**.)

(*Barthe*, **86**, 259.)

***106.** Condition pour que les équations de trois droites représentent des génératrices d'un paraboloïde. (LEMOINE, J. S., **110**.)

---

## QUADRIQUES DE RÉVOLUTION.

**107.** Une surface de révolution étant engendrée par la révolution d'une conique autour d'un axe principal, tout plan mené par un foyer O de la conique coupe la surface suivant une conique qui a le même point O pour foyer.

(MÖBIUS, N. A., **359**.)

(*Bourdelles*, **57**, 176.)

***108.** A, B, C, D, E étant cinq points situés sur la surface de révolution dont il est question dans l'énoncé précédent, on a la relation

$$\begin{aligned} OA.BC.DE + OB.CD.EA + OC.DE.AB \\ + OD.EA.BC + OE.AB.CD = 0. \end{aligned}$$

(MÖBIUS, N. A., **360**.)

**109.** Quel est le lieu que doit décrire le centre d'une sphère, pour que la polaire réciproque d'une surface du second ordre

Digitized by Google

donnée, par rapport à cette sphère, soit toujours une surface de révolution. (LAGUERRE, N. A., 545.)

(*Cremona*, **61**, 95.)

**110.** Toute surface conique, qui, ayant son sommet au foyer d'une surface de révolution du second ordre, passe par une section plane quelconque de cette surface de révolution, est elle-même une surface conique de révolution; la droite qui joint le foyer au pôle du plan de la section faite dans la surface du second ordre est l'axe de la surface conique.

(BOBILLIER, N. A., 622.)

(*Bartet*, **62**, 312.)

**111.** Expliquer comment il se fait que deux conditions soient nécessaires pour qu'une surface du second degré soit de révolution, lorsqu'on sait qu'il suffit que l'équation en $s$ ait deux racines égales. (MATHIEU, N. A., 705.)

(*Mathieu*, **67**, 177.)

**112.** Si, par le sommet d'une parabole, on mène une corde faisant, avec l'axe, un angle de 45°, l'anneau engendré par le segment parabolique, dans sa rotation autour de l'axe, est équivalent à la sphère ayant pour diamètre la projection de la corde.

Examiner le cas où la corde est quelconque.

(GABRIEL MARIE, N. C., 164.)

(*Guillet*, **76**, 398.)

**113.** On donne une demi-hyperbole équilatère AB, ayant A pour sommet, O pour centre, OH pour asymptote. Sur l'axe non transverse, on prend OC = OA; et, par le point C, on mène CD parallèle à l'axe transverse. Enfin, l'on trace deux ordonnées MP, M′P′, qui rencontrent, en Q, Q′, la droite CD, et qui, prolongées, rencontrent, en R, R′, l'asymptote. Cela posé, si la figure tourne autour de $Ox$, le tronc hyperbolique, engendré par MM′PP′, est équivalent à l'anneau engendré par RR′QQ′.

(GABRIEL MARIE, N. C., 165.)

(*Guillet*, **76**, 398.)

Digitized by Google

## UNE QUADRIQUE EN GÉNÉRAL; POLES ET PLANS POLAIRES.

**114.** Deux tétraèdres de volumes V et V′ étant polaires réciproques relativement à une surface du second degré dont les demi-axes principaux sont $a$, $b$, $c$; si l'on désigne par $V_1$, $V_2$, $V_3$, $V_4$ les volumes des quatre tétraèdres que l'on obtient en joignant le centre de la surface aux sommets de V, on a la relation

$$\left(\frac{abc}{6}\right)^2 = V' \frac{V_1 V_2 V_3 V_4}{V_3}.$$

Lorsque $V = V'$, on a un théorème de M. Painvin.

(N. A., **60**, 294.)

Il existe une relation analogue entre les volumes de deux tétraèdres corrélatifs. (Faure, N. A., 591, 599.)

(*Neuberg*, **65**, 549; **66**, 511.)

**115.** Étant donnée une surface du second ordre dont le centre est O, il y aura une infinité de tétraèdres conjugués par rapport à cette surface et en même temps circonscrits à une sphère dont le centre est un point arbitrairement choisi, C; si $r$ est le rayon de la sphère inscrite, si I est le point d'intersection du rayon vecteur OC avec le plan polaire du point C, par rapport à la surface, on a la relation

$$r^2\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}\right) = \frac{CI}{OI},$$

$2a$, $2b$, $2c$ représentant les valeurs algébriques des axes de la surface du second ordre. (Painvin, N. A., 760.)

(*Maffiotti*, **67**, 219, 520.)

**116.** Si la surface donnée (énoncé précédent) est un paraboloïde, et I le centre de la section de la surface par le plan



Digitized by Google

polaire du point C, on a la relation

$$r^2\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)=\mathrm{CI},$$

$2p$ et $2q$ étant les paramètres des sections principales.

(PAINVIN, N. A., **761**.)

(*Maffiotti*, **67**, 219.)

**117.** Le rayon de la sphère inscrite reste constant lorsque le centre de cette sphère se déplace sur une surface parallèle et égale à la première, cette seconde surface s'obtenant en faisant glisser la première parallèlement à son axe [1]

(PAINVIN, N. A., **762**.)

(*Maffiotti*, **67**, 219.)

**118.** Étant donnée une surface S du second ordre à centre, si l'on imagine une surface de révolution du second ordre ayant un de ses foyers au centre de la surface S et touchant les quatre faces d'un quelconque des tétraèdres conjugués par rapport à la surface S, la longueur de l'axe équatorial de la surface de révolution conserve une valeur constante quel que soit le tétraèdre considéré. On suppose la surface de révolution autour de l'axe qui passe par le centre de la surface S. (PAINVIN, N. A., **814**.)

(*Maffiotti*, **68**, 183.)

**119.** Appelons : 1° *indice d'un point*, par rapport à une surface du second degré, le rapport des distances de ce point et du centre de la surface au plan polaire du point; 2° *indice d'un plan*, le produit des distances du pôle du plan et du centre de la surface à ce plan; 3° *indice d'une droite*, le rapport que l'on obtient en divisant le carré de la demi-corde déterminée, par cette droite, dans la surface, par la quatrième puissance du demi-diamètre parallèle à la droite.

On demande de trouver d'autres expressions pour la valeur de ces indices. (FAURE, N. A., **918**.)

---

[1] *Voir* les deux énoncés précédents.

Digitized by Google

**120.** Lorsqu'une surface du second degré est conjuguée à un tétraèdre :

1° La somme des carrés de ses demi-axes est égale à la somme des inverses des indices des arêtes du tétraèdre;

2° La somme des carrés des inverses des demi-axes, prise en signe contraire, est égale à la somme des inverses des indices des faces du tétraèdre;

3° Le produit des carrés des demi-axes, pris en signe contraire, est égal au produit des inverses des sommets du tétraèdre, multiplié par 36 fois le carré du volume du tétraèdre.

(FAURE, N. A., 919.)

**121.** On donne une surface du second degré et un plan. Si l'on prend dans ce plan trois points conjugués à la surface, la somme des inverses des indices de ces trois points est égale à l'inverse de l'indice du point où le plan est rencontré par le diamètre qui lui est conjugué. (FAURE, N. A., 920.)

**122.** Une surface du second degré étant conjuguée à un tétraèdre, on propose de démontrer que la somme des inverses des indices des centres des sections, déterminées dans la surface par les faces du tétraèdre, est égale à $-3$ (¹).

(FAURE, N. A., 921.)

**123.** On donne une surface du second degré et un tétraèdre *abcd*; si l'on désigne par A, B, C, D les faces de ce tétraèdre opposées aux sommets $a$, $b$, $c$, $d$ et par A′, B′, C′, D′ les plans polaires de ces sommets, la somme

$$\sum \frac{\cos(A, A')}{(a, A)(o, A')},$$

dans laquelle $o$ est le centre de la surface, est constante, quel que soit le tétraèdre *abcd*. Donner la valeur de la constante. [On désigne par $(a, A)$ la distance du point $a$ au plan A, etc.].

(FAURE, N. A., 996.)

(*Genty*, **72**, 139.)

---

(¹) Les quatre questions 119, 120, 121, 122 se trouvent résolues dans une série d'articles de M. *Neuberg*, publiés dans les N. A., **70**, 317, 360, 399, 433.

Digitized by Google

**124.** On donne un tétraèdre conjugué à une surface du second degré. Si l'on désigne par I l'indice [1] du centre d'une sphère inscrite au tétraèdre (par rapport à la surface) et par R le rayon de cette sphère, l'expression $\frac{I}{R^2}$ a la même valeur pour toutes les sphères inscrites. (FAURE, N. A., **1011**.)

(*Callandreau*, **73**, 454.)

**125.** On donne une surface du second degré et deux points $e$, $e'$ : par le point $e$, on mène une transversale quelconque rencontrant la surface aux points $a$ et $b$; par le point $e'$, on mène une parallèle à la transversale; cette parallèle rencontre aux points $a'$ et $b'$ les plans tangents aux points $a$ et $b$.

Si D est le diamètre parallèle à la transversale, l'expression

$$\frac{ea.e'b' + eb.e'a'}{D^2}$$

a une valeur constante, quelle que soit la direction de la transversale. (FAURE, N. A., **1145**.)

(*Genty*, **75**, 133.)

**126.** On donne une surface du second degré et deux droites L, M. Sur la première L on prend deux points arbitraires $a$, $b$, et l'on trace les plans polaires de ces points.

Désignons par $c$ et $d$ les points d'intersection de ces plans avec la seconde M; par $e$ et $f$ les points d'intersection de ces mêmes plans avec le diamètre parallèle à la droite M : l'expression

$$Oe.Of.\frac{ab}{cd},$$

dans laquelle O est le centre de la surface, a une valeur constante. (FAURE, N. A., **1146**.)

(*Chabanel*, **75**, 135.)

---

[1] *Voir*, pour la définition des indices, l'énoncé 119, ci-dessus.

Digitized by Google

*127. Dans l'espace, deux figures corrélatives peuvent toujours être placées de manière à être polaires réciproques par rapport à une quadrique réelle. (TARRY, N. A., 1614.)

---

## UNE QUADRIQUE EN GÉNÉRAL; AUTRES QUESTIONS.

**128.** Étant donné un tétraèdre quelconque, si une surface du second degré passe aux milieux des trois arêtes d'un angle solide et leur est tangente; si, de plus, elle passe aux milieux des trois autres arêtes, elle leur sera également tangente. Cette surface a pour centre le centre de gravité du tétraèdre.

(VANNSON, N. A., 629.)

(*Andlauer*, **62**, 462.)

**129.** Équation d'une surface du second degré passant par trois droites.

On peut mettre les équations des trois droites données sous la forme suivante :

$$\text{Première droite.....} \begin{cases} A = 0, \\ B = 0; \end{cases}$$

$$\text{Deuxième droite.....} \begin{cases} C = 0, \\ D = 0; \end{cases}$$

$$\text{Troisième droite.....} \begin{cases} A\alpha + B\beta + C\gamma + D\delta = 0, \\ A\alpha' + B\beta' + C\gamma' + D\delta' = 0. \end{cases}$$

L'équation de la surface du second degré est

$$\frac{A\alpha + B\beta}{C\gamma + D\delta} = \frac{A\alpha' + B\beta'}{C\gamma' + D\delta'}.$$

A, B, C et D désignent des fonctions du premier degré en $x$, $y$ et $z$; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, $\alpha'$, $\beta'$, $\gamma'$, $\delta'$ sont des constantes.

(BARBIER, N. A., 739.)

(*Niebylowski*, **66**, 178.)

Digitized by Google

*130. Pour qu'une surface du second ordre soit transformée homologiquement en une sphère, il faut et il suffit : 1° que le plan d'homologie soit parallèle à l'un des plans cycliques de la surface (PONCELET, *Propriétés projectives*); 2° que le centre d'homologie soit un quelconque des points de la *conique focale* située dans le plan principal auquel le plan d'homologie est perpendiculaire. (PAINVIN, N. A., 815.)

*131. On coupe une surface du second degré (S) par un plan. On prend, sur la courbe d'intersection C, quatre points arbitraires (non en ligne droite) $a$, $b$, $g$, $h$, et l'on mène en ces points les normales A, B, G, H à la surface (S). On construit le couple de droites D, Δ rencontrant à la fois ces quatre normales et l'on détermine la droite I, issue d'un point fixe $i$, qui s'appuie sur D et Δ.

Démontrer que, lorsque l'on fait varier la position des points $a$, $b$, $g$, $h$ sur C, les droites telles que I engendrent un plan.

(MANNHEIM, N. A., 820.)

*132. Les données restant les mêmes qu'à l'énoncé ci-dessus, on construit comme précédemment le couple de droites D, Δ. On prend les traces de ces droites sur un plan fixe (P); on joint ces traces par une droite M.

Démontrer que, lorsque l'on fait varier la position des points $a$, $b$, $g$, $h$ sur C, les droites telles que M passent par un point fixe.

(MANNHEIM, N. A., 821.)

133. Étant donnée une surface du second ordre dont O est le centre, soit M un point quelconque de l'espace : 1° si le point M est extérieur à la surface, on mène une tangente MT, le diamètre conjugué OT de cette tangente, et le demi-diamètre OA conjugué du plan de ces deux droites; les points M, T, O, A sont les sommets d'un tétraèdre; soit V le volume du parallélépipède construit sur ce tétraèdre; 2° si le point M est intérieur à la surface, on mène une demi-corde MT, le demi-diamètre OB conjugué de cette demi-corde, et le demi-diamètre OA conjugué du plan de ces deux droites : les points B, T, O, A sont les som-

Digitized by Google

mets d'un tétraèdre; soit V le volume d'un parallélépipède construit sur ce tétraèdre.

Le volume V est ce que M. Aoust nomme la *puissance* du point M par rapport à la surface considérée (*Comptes rendus*, 1er semestre 1867, p. 590). A cette occasion, je signalerai la relation suivante.

Soit l'équation de la surface du second ordre

$$\begin{aligned} f(x, y, z) = {} & Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz \\ & + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0; \end{aligned}$$

si $x, y, z$ sont les coordonnées du point M, V le volume du parallélépipède défini ci-dessus, on a

$$\text{(I)} \qquad f(x, y, z) = \pm \frac{\delta^3}{\Delta^2} V^2,$$

$\delta$ et $\Delta$ représentant les déterminants

$$\delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' \\ B'' & A' & B \\ B' & B & A'' \end{vmatrix}, \qquad \Delta = \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix}.$$

On doit prendre le signe + ou — suivant que le point M est *extérieur* ou *intérieur* à la surface.

On sait d'ailleurs que, si $a$, $b$, $c$ sont les axes de la surface, on a

$$\text{(II)} \qquad a^2 b^2 c^2 = -\frac{\Delta^3}{\delta^4}.$$

Les relations (I) et (II) rendent, pour ainsi dire, intuitives toutes les propriétés énoncées par M. Aoust (*loco citato*).

(PAINVIN, N. A., 837.)

(*Neuberg*, **70**, 317) (1).

**134.** On coupe une surface du second degré par un plan; aux différents points de l'intersection, on mène les normales à la sur-

(1) *Voir* plus haut, énoncé 122, note.

Digitized by Google

face; par un point de l'espace, on mène des droites égales et parallèles aux longueurs interceptées sur ces normales entre leur pied sur la surface et le plan de symétrie : les extrémités de toutes ces droites se trouvent sur une conique.

(LAGUERRE, N. A., 981, 1017.)

*Moret-Blanc*, **71**, 331.)

**135.** Soit K la courbe d'intersection d'une surface du second ordre et d'une sphère ayant pour centre un point d'un plan de symétrie de la surface; désignons par C la projection orthogonale de K sur ce plan de symétrie et par C′ le lieu des points où ce même plan est coupé par les normales élevées aux différents points de K; C et C′ sont deux coniques ayant leurs axes parallèles, et, si l'on désigne respectivement par $a^2$ et $a'^2$, $b^2$ et $b'^2$ les carrés des axes parallèles, on a la relation

$$a^2 a'^2 = b^2 b'^2.$$ (LAGUERRE, N. A., 985.)

(*Ducuing*, **72**, 230.)

**136.** On donne une surface du second degré et une sphère; si l'on désigne par $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les angles sous lesquels trois plans diamétraux de la surface (ou trois diamètres conjugués) rencontrent la sphère, et par A, B, C les aires des sections déterminées par ces plans (ou les longueurs des diamètres), on a la relation

$$A^2 \sin^2\alpha + B^2 \sin^2\beta + C^2 \sin^2\gamma = \text{const.}$$ (FAURE, N. A., 1005.)

(*Genty*, **72**, 510.)

**137.** Étant pris trois diamètres conjugués d'une surface du second degré, si l'on projette chacun d'eux sur une droite perpendiculaire au plan des deux autres, la somme des valeurs inverses des carrés de ces projections est constante.

(FAURE, N. A., 1030.)

(*Ylliac*, **72**, 465.)

**138.** On prend sur une surface du second degré une section plane quelconque; cette courbe peut être prise pour la focale

Digitized by Google

d'une surface nouvelle passant par l'une ou l'autre des focales de la première. (DARBOUX, N. A., **1034**)

[*Pellet, Painvin*, **73**, 464 (¹), 579.]

**139.** Une surface du second degré est circonscrite à un tétraèdre. Par un point $m$ de la surface, on mène à l'une des arêtes une parallèle rencontrant aux points $a$ et $b$ deux des faces du tétraèdre. Si l'on désigne par D la longueur du diamètre de la surface parallèle à cette arête, la somme $\sum \frac{ma.mb}{D^2}$ étendue aux six arêtes est nulle. (FAURE, N. A., **1185**.)

(*Demartres*, **76**, 561.)

**140.** Soient A un ombilic d'une surface du second degré donnée (S), et $\rho$ le second point d'intersection de la normale en ce point avec la surface. On joint un point quelconque $m$ de la surface (S) aux points $\rho$ et A; par ce dernier point et perpendiculairement à la droite A$m$, on mène un plan qui coupe $\rho m$ en un point $\mu$.

Le point $\mu$ décrit un plan parallèle aux sections circulaires de la surface (S). (GENTY, N. A., **1203**.)

(*Jacob*, **76**, 331.)

**141.** Si une surface du second ordre a pour équation

$$\begin{aligned} Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy \\ + 2Cx + 2C'y + 2C''z - 1 = 0, \end{aligned}$$

et si cette équation représente deux plans, les coefficients sont liés par les trois relations

$$(1) \qquad M\frac{B'B''}{B} + N\frac{BB''}{B'} + P\frac{BB'}{B''} + 1 = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{M}{B}C + \frac{N}{B'}C' + \frac{P}{B''}C'' = 0,$$

$$(3) \qquad MC^2 + NC'^2 + PC''^2 - 1 = 0.$$

(¹) Généralisation.

Digitized by Google

Dans ces relations on a posé

$$\frac{1}{M} = A - \frac{B'B''}{B}, \qquad \frac{1}{N} = A' - \frac{BB''}{B'}, \qquad \frac{1}{P} = A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

(HIOUX, N. A., **1204**.)

(*Bourguet*, **76**, 333.)

**142**. Sur une normale menée par un ombilic O à une surface du second degré, il existe un point P tel, qu'en menant par ce point une transversale rectiligne, rencontrant la surface en des points M, M′, l'angle MOM′ est constamment droit, quelle que soit la direction donnée à la transversale. Et le plan polaire du point P, par rapport à la surface considérée, est parallèle à un plan cyclique de cette surface. (N. A., **1228**.)

(*Jamet*, **78**, 83.)

**143**. Dans les surfaces du second ordre à centre unique, ce centre pouvant d'ailleurs être situé à distance finie ou infinie, le lieu des points tels que les génératrices rectilignes, réelles ou imaginaires, soient orthogonales, est donné par l'intersection, réelle ou imaginaire, de la surface considérée, avec la sphère de Monge, relative à cette même surface. (ESCARY, N. A., **1247**.)

(*Dunoyer*, **78**, 230.)

***144**. Soient A, B, C, D et $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ les aires des faces et les longueurs des arêtes d'un tétraèdre donné; V son volume; M un point d'une surface du second ordre circonscrite à ce tétraèdre, et telle que le plan tangent de cette surface en chacun des sommets du tétraèdre soit parallèle à la face opposée; $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les demi-axes de la surface; $v$, $v'$, $v''$, $v'''$ les volumes des tétraèdres ayant respectivement pour bases les faces du tétraèdre donné et pour sommet le point M : on a les relations

$$v^2 + v'^2 + v''^2 + v'''^2 = V^2,$$

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = \frac{3}{16}(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2),$$

$$\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\gamma^2 + \beta^2\gamma^2 = \frac{9}{16}(A^2 + B^2 + C^2 + D^2),$$

$$\alpha^2\beta^2\gamma^2 = \frac{243}{64}V^2. \quad \text{(GENTY, N. A., 1319.)}$$

Digitized by Google

*145. Si une surface du second degré coupe les trois axes rectangulaires des coordonnées en des points ayant pour coordonnées $x_1$, $x_2$, $y_1$, $y_2$, $z_1$, $z_2$, on a, lorsque les axes se transportent parallèlement à eux-mêmes,

$$\left(\frac{x_2-x_1}{x_1x_2}\right)^2+\left(\frac{y_2-y_1}{y_1y_2}\right)^2+\left(\frac{z_2-z_1}{z_1z_2}\right)^2=\text{const.}$$

(STEINER, N. C., 187.)

146. Étant donnés un tétraèdre ABCD et deux points M, M′, on mène par ceux-ci les six droites qui s'appuient sur deux arêtes opposées du tétraèdre. On obtient ainsi sur les arêtes douze points qui sont sur une même surface du second ordre. Trouver l'équation de cette surface en fonction des coordonnées tétraédriques de M et M′. (NEUBERG, M., 324.)

(*Mosnat*, **87**, 120.)

147. Trouver l'équation du cône ayant pour sommet le centre d'une surface du second ordre et admettant pour génératrices les trois axes de coordonnées rectangulaires et les trois axes de la surface. (E. LUCAS, J. S., 15 *bis*.)

(*Toqué*, **83**, 91.)

---

## PLUS D'UNE QUADRIQUE.

148. Lorsque plusieurs surfaces du second ordre Σ sont circonscrites à une surface S du même ordre, tout plan cyclique de S coupe les surfaces Σ suivant des courbes dont les focales passent toutes par les deux mêmes points, qui sont réels ou imaginaires suivant que l'intersection de S et du plan considéré est imaginaire ou réelle. (GROS, N. A., 288.)

(**63**, 343.)

149. Soient deux surfaces du second ordre S et T; ABCD le tétraèdre conjugué par rapport à ces deux surfaces, et Γ la

Digitized by Google

courbe gauche d'intersection de S et T. Les plans polaires d'un point P, par rapport aux diverses surfaces du second ordre passant par la courbe Γ, tournent autour d'une droite Δ; les plans menés par la droite Δ et les sommets du tétraèdre ABCD forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant quel que soit le point considéré P.

Plus particulièrement, les plans menés par une tangente quelconque à la courbe gauche Γ par les sommets du tétraèdre ABCD forment un faisceau dont le rapport anharmonique est constant.

(PAINVIN, N. A., 836.)

(*Barbier*, **68**, 445; *Fouret*, **69**, 86) (¹).

**150.** On donne deux surfaces du second degré homofocales A et B; par une droite D, prise arbitrairement dans l'espace, on mène des plans tangents à cette surface.

Soient $b$ et $b'$ les points où deux de ces plans tangents touchent la surface B, $a$ le point où l'un des plans touche la surface A; les droites $ab$, $ab'$ sont dans le même plan que la normale en $a$ à la surface A, et sont également inclinées sur cette normale. (LAGUERRE, N. A., 845.)

(*Barbier*, **69**, 38.)

**151.** Étant donné un faisceau de surfaces du second degré, ayant même intersection, si par un point A, pris sur une de ces surfaces, on mène une section plane normale à cette surface, et les demi-diamètres des autres surfaces parallèles à la tangente à la section au point A, ainsi que les plans polaires de ce point par rapport à ces surfaces; si l'on prend, à partir du point A et dans la direction des normales à ces plans polaires, des troisièmes proportionnelles aux demi-diamètres et aux distances correspondantes des plans polaires aux centres des surfaces, les extrémités de ces droites et le centre de courbure de la section faite dans la première surface sont en ligne droite.

(AOUST, N. A., 904.)

(*Moret-Blanc*, **74**, 431.)

---

(¹) Généralisation.

Digitized by Google

**152.** On a deux surfaces homofocales du second degré A et B; en deux points M et M′ de la première on mène les normales qui rencontrent la seconde en quatre points.

Démontrer que le plan mené par le milieu de la corde MM′, et perpendiculairement à cette corde, passe par le milieu de l'une des cordes qui joignent les points d'intersection des normales avec la seconde surface [1]. (LAGUERRE, N. A., 960.)

(*Laguerre*, **70**, 46.)

**153.** Reconnaître les différentes surfaces représentées par l'équation

$$a\frac{y+z}{x}+b\frac{x+z}{y}+1=0,$$

quand $a$ et $b$ prennent toutes les valeurs possibles.

Trouver le lieu des centres de ces diverses surfaces.

Indiquer les particularités relatives aux axes des coordonnées, aux sections planes.

Peut-il y avoir des sections circulaires?

Les surfaces en question peuvent-elles être de révolution?

Montrer que leur enveloppe est une surface du second ordre, lorsque le produit $ab$ reste constant. (BROCARD, N. A., 972.)

(*Gallois*, **73**, 440.)

**154.** On donne deux surfaces fixes du second ordre; on imagine une droite D telle que les plans tangents aux points où elle rencontre deux surfaces se coupent en un même point M :

1° Lorsqu'on se donne le point M, il y a une droite D, et une seule, satisfaisant à la question; elle est l'intersection des plans polaires du point M par rapport aux deux surfaces;

2° Lorsque le point M décrit une droite fixe, la droite D décrit

---

[1] Une erreur s'est glissée dans la rédaction de la question 960. Il existe bien, pour chaque surface du second ordre, un groupe de surfaces du même ordre qui jouissent de la propriété indiquée, mais ces surfaces ne sont pas homofocales à la première.

(*Extrait d'une lettre de Laguerre à Bourget.*)

Digitized by Google

une surface du second ordre circonscrite au tétraèdre conjugué par rapport aux deux surfaces;

3° Lorsque la droite D se meut sur un plan fixe, le point M décrit une cubique gauche. (PAINVIN, N. A., **1040**.)

(*Doucet*, **72**, 512.)

**155**. On donne deux surfaces fixes du second ordre, qui *se raccordent* suivant une droite unique AB.

1° Les pôles d'un même plan, P, par rapport aux deux surfaces, sont sur une droite Δ qui rencontre la ligne AB.

2° Lorsque la droite Δ décrit un plan fixe passant par AB, le plan P tourne autour d'un point fixe également situé sur AB.

3° Lorsque le plan P tourne autour d'une droite fixe, la droite Δ décrit une surface du second ordre passant par la ligne AB.

(PAINVIN, N. A., **1041**.)

(*Doucet*, **72**, 238.)

**156**. Étant données les équations

$$(1) \qquad 5x^2 + 5y^2 - z^2 + 60x - 24z = 0,$$

$$(2) \qquad 25x^2 + 25y^2 + z^2 - 15xz = 0,$$

$$(3) \qquad 75x^2 + 75y^2 + 2z^2 + 5yz - 45xz = 0,$$

représentant des surfaces rapportées à un même système d'axes rectangulaires, on demande : 1° de trouver le genre de chaque surface; 2° de trouver l'intersection des surfaces (1) et (2); 3° de trouver les projections, sur les plans coordonnés, de l'intersection des surfaces (1) et (3). (LEBON, N. A., **1328**.)

(*Moret-Blanc*, **81**, 333.)

Digitized by Google

# TROISIÈME PARTIE.

# LIEUX GÉOMÉTRIQUES ET ENVELOPPES.

## LIEUX GÉOMÉTRIQUES DE POINTS.

### Lieux relatifs à des figures rectilignes.

**157.** Si le côté AB d'un triangle donné ABC est inscrit dans l'angle fixe MON, l'inclinaison du plan du triangle sur le plan MON étant donnée, le lieu du point C dans l'espace est une ellipse dans laquelle la somme algébrique des demi-axes est égale au diamètre du cercle circonscrit au triangle AOB.

(TERQUEM, N. A., **91**.)

(*Faure*, **45**, 186.)

**158.** Trouver et discuter l'équation de la surface qui jouit de cette propriété, que la somme des distances de chacun de ses points aux deux côtés d'un angle droit est constante.

(N. A., **192**.)

(*Dupain*, **60**, 57.)

**159.** Résoudre la question précédente pour les trois côtés d'un angle trièdre trirectangle. (N. A., **193**.)

**160.** Les trois sommets A, B, C d'un triangle et les trois sommets A′, B′, C′ d'un tétraèdre sont donnés; par un point quelconque M dans le plan du triangle ABC, on mène les droites

Digitized by Google

MA, MB, MC; on prend dans l'espace un point S tel, que dans le tétraèdre SA'B'C' on ait

$$SA' = MA, \qquad SB' = MB, \qquad SC' = MC;$$

le lieu du point S est une surface du second degré.

(JACOBI, N. A., 228.)

(*Lecointe*, **52**, 314.)

**161.** Les quatre faces d'un tétraèdre passent, chacune, par un point fixe; les trois côtés de l'une des quatre faces sont assujettis à rester, chacun, sur un point fixe : trouver le lieu géométrique du sommet du tétraèdre opposé à cette face.

Ce lieu est, en général, une surface du troisième degré, qui se réduit à un cône du second degré quand ces quatre points fixes sont situés sur un même plan. (SALMON, N. A., 637.)

(*Harang, Beltrami*, **63**, 146, 181, 184.)

**162.** On donne trois droites quelconques $D_A$, $D_B$, $D_C$; un triangle dont les côtés sont A, B, C et un point $o$ dans le plan de ce triangle.

Par le point $o$ on mène un plan quelconque qui coupe les droites données en $a$, $b$, $c$. Les plans (A, $a$), (B, $b$), (C, $c$) se coupent en un point $m$, dont on demande le lieu lorsqu'on fait varier le plan qui passe par le point $o$.

(MANNHEIM, N. A., 1132.)

(*Bourguet*, **75**, 87.)

**163.** On donne un triangle dont les côtés sont A, B, C, un trièdre dont le sommet est un point du plan de ce triangle et un point quelconque $o$.

Par le point $o$, on mène une transversale quelconque qui coupe les faces du trièdre aux points $a$, $b$, $c$.

Les plans (A, $a$), (B, $b$), (C, $c$) se coupent en un point $m$ dont on demande le lieu lorsqu'on fait varier la transversale qui passe en $o$. (MANNHEIM, N. A., 1133.)

(*Bourguet*, **75**, 87.)

Digitized by Google

**164.** On donne le plan et les trois angles d'un triangle ABC dont un sommet A est fixe; trouver le lieu géométrique des points de l'espace d'où les trois côtés du triangle sont vus sous des angles droits.

On suppose que les trois angles donnés sont aigus.

(N. A., **1374**.)

(*Goffart*, **81**, 524.)

***165.** Soient ABC, A′B′C′ deux triangles situés d'une manière quelconque dans l'espace. Le lieu d'un point P, tel que les trois droites menées par P, et s'appuyant, respectivement, sur les couples de droites (AB, A′B′), (BC, B′C′), (CA, C′A′), sont situées dans un même plan, est l'hyperboloïde passant par les droites AA′, BB′, CC′. (Neuberg, N. C., **121**.)

**166.** Trouver la surface lieu des points de vue qui donnent pour perspective, sur un plan fixe, d'un segment de droite fixe de longueur donnée, un autre segment de longueur constante.

Transformer le mode de génération, de manière à mettre en évidence les sections circulaires.

(Larrivet, N. C., **274**; M., **434**.)

(*Brocard*, M., **86**, 43.)

**167.** Trouver le lieu géométrique des points de l'espace jouissant de cette propriété : si l'on abaisse des perpendiculaires sur les côtés (prolongés s'il est nécessaire) d'un triangle donné arbitrairement, la perpendiculaire à l'un des côtés, pris pour base, est toujours moyenne proportionnelle entre les perpendiculaires aux deux autres côtés. (Van Haarst, N. C., **310**.)

(*Dubois*, **80**, 176.)

**168.** Lorsque trois points d'une droite glissent sur les faces d'un trièdre, un quatrième point de cette droite décrit un ellipsoïde; démontrer que le volume de l'ellipsoïde est indépendant de l'inclinaison des faces du trièdre. (Ed. Lucas, M., 64.)

(*Verstraeten*, **82**, 79) [1].

---

[1] *Voir* aussi **81**, 182; **82**, 37.



Digitized by Google

**169.** Si trois points d'une droite glissent sur trois plans qui se coupent, on sait, par le théorème de Dupin, qu'un quatrième point de cette droite décrit un ellipsoïde. Démontrer que le volume de cet ellipsoïde est indépendant de l'angle des plans [1].

(Ed. Lucas, J. M., **383**.)

**170.** Trouver le lieu du point dont la distance à une ligne fixe est dans le rapport donné avec la somme ou la différence de ses distances à deux points fixes. (J. S., **18**.)

(*Clément*, **86**, 239.)

**171.** On donne cinq points sur une droite. Celle-ci se déplace de manière que quatre de ces points décrivent les quatre faces d'un tétraèdre. Le cinquième point décrit une ellipse.

(Mannheim.)

Lorsqu'un des quatre points se déplace sur la droite, cette ellipse varie. Prouver que le lieu de son centre est une autre ellipse et définir les éléments de cette dernière courbe.

(Amigues, J. S., **226**.)

(*Rezeau*, **90**, 253.)

**172.** Deux sommets, A, B, d'un triangle ABC sont fixes; le troisième parcourt une droite non située dans un même plan avec AB. On ramène toutes les positions du triangle dans un même plan, par des rotations autour de la base AB. Le lieu de C est alors une hyperbole; déterminer le centre, les axes et les asymptotes de cette courbe. (Neuberg, J. S., **246**.)

(*Laisant*, **88**, 185.)

**173.** Une droite se déplace de façon que trois de ses points restent sur trois plans parallèles à une même droite. Démontrer qu'un point de la droite mobile se déplace sur un plan.

(Mannheim, J. S., **263**.)

(*Tarry*, **89**, 138; **91**, 282.)

---

[1] On remarquera que les deux énoncés 168 et 169 sont identiques. Nous ne les avons maintenus l'un et l'autre qu'à cause de la légère différence des rédactions.

Digitized by Google

## Lieux relatifs à des quadriques.

**174.** Étant donné un cône du second degré, trouver le lieu du point d'où ce cône est vu sous un angle donné. (N. A., **490**.)

(*Niebylowski*, **66**, 132.)

**175.** Un angle trièdre trirectangle mobile a son sommet en un point fixe pris sur une surface quelconque du second ordre; le plan déterminé par les intersections de ses trois arêtes avec cette surface passe constamment par un même point de la normale issue du sommet fixe de l'angle trièdre. On demande le lieu de ce point, lorsque le sommet du trièdre parcourt la surface donnée. (MANNHEIM, N. A., **624**.)

(*Schnée, Beltrami*, **62**, 345; **63**, 209.)

**176.** Trouver sur la surface d'un hyperboloïde à une nappe le lieu géométrique d'un point tel, que les deux génératrices rectilignes menées par ce point fassent un angle donné.

Cas particulier où l'angle donné est droit. (N. A., **638**.)

(*Hans*, **63**, 152.)

**177.** Trouver sur la surface d'un paraboloïde hyperbolique le lieu géométrique d'un point tel, que les deux génératrices rectilignes menées par ce point fassent un angle donné.

Cas particulier où l'angle donné est droit. (N. A., **639**.)

(*Lhuillier*, **63**, 149, 154.)

**178.** Un ellipsoïde donné tourne autour d'un point fixe donné sur l'un de ses axes de symétrie; trouver le lieu des pôles d'un plan fixe donné par rapport aux diverses positions de l'ellipsoïde. (LAFONT, N. A., **922**.)

(*Schlegel*, **69**, 542.)

**179.** Une sphère de rayon constant se déplace en restant tan-

Digitized by Google

gente à une droite et à un cylindre de révolution donnés; trouver le lieu du point de contact sur le cylindre.

(MANNHEIM, N. A., 1072.)

(*Fouret*, **74**, 202.)

**180.** Étant donné un ellipsoïde et un point A, on mène par ce point une sécante variable D; soit $D_1$ la droite conjuguée de D par rapport à l'ellipsoïde. Trouver le lieu de la projection M du point A sur la droite $D_1$. (BARBARIN, N. A., 1424.)

(*Moret-Blanc*, **83**, 376.)

**181.** Par un point O de l'espace, on abaisse des perpendiculaires sur trois plans diamétraux conjugués d'une quadrique et l'on mène le plan passant par le pied de ces trois perpendiculaires. Ce plan et les plans analogues obtenus en faisant varier le système des trois plans diamétraux conjugués passent par un même point M. Trouver le lieu du point M lorsque, le point O restant fixe, la quadrique tourne autour d'une droite.

(PELLET, N. A., 1478.)

**182.** Étant donnés deux plans fixes, on considère deux sphères de même rayon tangentes entre elles et touchant chacune un des deux plans.

Le point commun à l'une des deux sphères et au plan correspondant étant donné, on demande le lieu du point commun aux deux sphères lorsqu'on fait varier leur rayon.

(GENEIX-MARTIN, N. A., 1542.)

**183.** On donne deux paraboloïdes semblables, semblablement placés, et ayant même axe principal. On mène à l'une de ces surfaces des plans tangents qui coupent l'autre suivant des circonférences. Quel est le lieu des points de contact de ces plans tangents? (ESCARY, N. C., 319.)

**184.** Soient OA, OB, OC les demi-axes d'un ellipsoïde. En un point quelconque M de la surface, on mène une normale M*m*

Digitized by Google

rencontrant le plan AOB en $m$; on élève la droite $mM'$ perpendiculaire au plan AOB et égale à $Mm$. Trouver l'équation du lieu du point M'.

Lorsque M se meut sur l'ellipse AB, $m$ décrit une autre ellipse E. Expliquer l'existence des points du lieu précédent, qui se projettent à l'extérieur de E. (M., 237.)

(*Neuberg*, **84**, 227.)

**185.** Sur une base fixe ABC, on construit des tétraèdres ABCD tels, qu'on puisse inscrire une sphère aux six arêtes. Le lieu du sommet D se compose de quatre coniques. (NEUBERG, M., 255.)

(*Jamet*, **84**, 140.)

**186.** Trouver le lieu des points de contact d'une série de surfaces homofocales du second degré avec des plans passant par une droite donnée ou par un point donné. (J. S., 21.)

(*Barthe*, **87**, 165.)

**187.** Dans un plan mené par un des axes d'un ellipsoïde, on trace une circonférence ayant pour centre le centre de l'ellipsoïde; puis on mène tous les plans tangents à l'ellipsoïde et qui contiennent une tangente à la circonférence. Construire les projections du lieu des points de contact sur le plan de la circonférence et sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'ellipsoïde situé dans ce plan. (L. LÉVY, J. S. 139.)

**188.** 1° Lorsque quatre points d'une droite sont assujettis à rester sur quatre quadriques ayant un diamètre commun et homothétiques deux à deux, il existe, sur la droite, un point particulier qui décrit une courbe plane; tout autre point de la droite décrit une courbe située sur une quadrique homothétique à l'une quelconque des premières et admettant leur diamètre commun pour un de ses diamètres.

2° Lorsque quatre points d'une droite décrivent des courbes situées sur des quadriques appartenant au réseau qui, dans un

Digitized by Google

système d'axes rectangulaires, correspond à l'équation

$$f(x, y) + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) + \mu = 0,$$

dans laquelle $f(x, y)$ représente une fonction homogène du second degré, $\lambda$ et $\mu$ étant deux paramètres, tout autre point de la droite décrit une courbe située sur une surface appartenant à la famille. (PELLET, J. S., 322.)

## Autres générations.

189. On donne une conique et deux points A et B dans l'espace. Par ces deux points, on mène un plan qui rencontre la conique en deux points A′ et B′. Trouver le lieu du point M d'intersection des couples de droites (AA′, BB′) et (AB′, BA′). Cas particuliers. (BROCARD, N. A., 1065.)

(*Dewulf*, 72, 239.)

*190. On donne une ellipse, on prend le triangle *acb* formé par les deux tangentes *ca*, *cb* à cette courbe et la corde de contact *ab*, et l'on détermine un point *m* d'où l'on voit, sous des angles droits, les côtés du triangle *abc*. Quelle est la surface lieu des points tels que *m*, lorsqu'on prend tous les triangles analogues à *acb*? (MANNHEIM, N. A., 1363.)

191. On donne, dans un plan horizontal, deux tiges sur lesquelles roule une surface de révolution dont la courbe méridienne admet deux axes de symétrie, et dont l'équateur reste dans le plan vertical de la bissectrice de l'angle que forment les tiges. Le lieu du centre de la surface mobile est une courbe de même nature que la méridienne.

Définir cette courbe lorsque la surface de révolution est un cône (le double cône des expériences de Physique), une sphère ou un ellipsoïde. (BROCARD, N. C., 285; M., 436.)

(*Anderson*, M., 90, 87.)

192. En un point quelconque M $(x, y, z)$ de la surface ayant

Digitized by Google

pour équation $F(x, y, z) = 0$, on mène le plan tangent, qui coupe les axes OX, OY, OZ aux points A, B, C. On construit le parallélépipède ayant pour arêtes OA, OB, OC; soit M′ le sommet opposé à O. Trouver le plan tangent au point M′ de la surface engendrée par ce point lorsque M se déplace sur la surface donnée.

(NEUBERG, M., 741.)

(*Absolonne*, **92**, 146.)

**193.** On donne l'équation d'une surface à laquelle on peut mener $k$ normales d'un point quelconque. Indiquer comment on trouvera le milieu du point M tel que la somme des carrés de ces normales soit égale à $l^2$.

Si M est un point du lieu et G le centre des moyennes distances des pieds des normales menées du point M, faire voir que la droite MG est normale, au point M, à la surface lieu des points M.

Faire le calcul pour la surface représentée par l'équation

$$y^2 + mz^2 = 2px,$$

et montrer que dans ce cas la surface, lieu des points M, est du second ordre. (AMIGUES, J. S., 180.)

## Lieux de centres et de foyers.

**194.** Déterminer le lieu géométrique du centre d'une sphère qui coupe sous des angles donnés, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, trois sphères données A, B, C. (N. A., 787.)

(*Willière*, **70**, 234.) (1)

***195.** On donne dans l'espace deux droites A et B. Une hyperbole H doit avoir la droite A pour directrice et être un méridien d'une surface gauche de révolution contenant la droite B. On demande le lieu du foyer de H, correspondant à la directrice A.

(HALPHEN, N. A., 1502.)

---

(1) *Voir* aussi **67**, 476.

Digitized by Google

*196. Le lieu des foyers des sections faites dans un ellipsoïde de révolution aplati, par un faisceau de plans passant par une même droite parallèle à l'axe de révolution, est une podaire d'ellipse. (FOURET, N. A., 1539.)

*197. Le lieu des foyers des sections faites dans un cylindre parabolique par un faisceau de plans passant par une même droite perpendiculaire au plan diamétral principal du cylindre, est une podaire de parabole. (FOURET, N. A., 1540.)

*198. Par tous les points d'une conique, on mène, dans une direction donnée, des droites parallèles et égales au rayon focal correspondant : le lieu des extrémités est une conique. Trouver le lieu des centres et des foyers de cette conique, lorsque l'on fait varier la direction donnée, dans le plan ou dans l'espace.
(ED. LUCAS, N. C., 376.)

*199. On coupe un ellipsoïde :

1° Par des plans parallèles à un plan donné;

2° Par des plans passant par une droite donnée;

3° Par des plans passant par un point donné.

Trouver les lieux décrits par les foyers de ces sections dans les trois cas. (J. M., 332.)

200. On donne dans les plans des $zx$ et des $yz$ deux coniques tangentes à l'axe $Oz$ à l'origine des coordonnées; on demande l'équation générale des surfaces du second ordre contenant ces deux coniques et le lieu des centres de ces surfaces. Discuter le lieu obtenu et étudier comment il varie avec la nature des coniques données. (J. M., 373.)

201. Étant données deux paraboles situées, l'une dans le plan des $zx$, l'autre dans le plan des $yz$, et ayant deux points communs situés sur $Oz$, on demande de trouver le lieu des centres des surfaces du second degré qui contiennent ces deux paraboles. Séparer sur ce lieu les portions qui répondent aux divers genres de surfaces qui peuvent contenir les deux paraboles données.
(J. M., 398.)

Digitized by Google

**202.** On donne en coordonnées rectangulaires un paraboloïde ayant pour équation

$$x^2 + y^2 = 2pz.$$

1° Lieu des foyers des sections parallèles à son axe.

2° Lieu des foyers des sections dont les plans sont tangents à un cylindre parallèle à l'axe; cas où ce cylindre a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

ou bien

$$ay^2 = x^2.$$

3° Que doit être ce cylindre pour que la courbe, lieu des foyers, soit sur un autre cylindre représenté par l'équation

$$(x^2 + y^2)^3 = a^3y^3 + b^3x^3?$$ (AMIGUES, J. S., 70.)

**203.** Lieu du centre d'une surface du second ordre qui passe par une ellipse donnée et par deux points symétriques par rapport au plan de cette ellipse. Le lieu cherché est une surface que l'on décomposera en régions dont les points soient des centres de surfaces de même genre. (AMIGUES, J. S., 105.)

(*Vessiot,* **85**, 258.)

**204.** On fait une section droite dans un cylindre parabolique. Par le foyer de cette section, on mène dans le plan de la courbe une perpendiculaire à l'axe, qui coupe la courbe en deux points A et B. Au point A, on mène dans le plan de la parabole la normale AM à cette courbe; puis, par AM, on fait passer des plans variables. Lieu des foyers des paraboles suivant lesquelles ces plans coupent le cylindre. Ce lieu est une courbe plane.

(AMIGUES, J. S., 124.)

(*Rat,* **87**, 88; **89**, 232.)

**205.** On considère l'une des surfaces du second ordre qui passent par les quatre côtés d'un quadrilatère gauche, et un plan. La section est une conique dont on demande les foyers.

Digitized by Google

Lieu de ces foyers quand la surface change; lieu des foyers lorsque, la surface restant la même, le plan se déplace parallèlement à lui-même. (AMIGUES, J. S., 145.)

206. Par l'intersection de deux quadriques de révolution on ne peut faire passer d'autres quadriques de révolution que si leurs axes sont rectangulaires ou parallèles.

S'ils sont rectangulaires, on n'en peut faire passer qu'une : les axes des trois quadriques sont rectangulaires deux à deux.

S'ils sont parallèles, on en peut faire passer une infinité; le lieu des foyers de leurs méridiennes est une cubique plane.

(AMIGUES, J. S., 290.)

207. On considère deux quadriques de forme invariable, l'une fixe, l'autre mobile. Elles sont assujetties à se couper suivant une circonférence, le reste de leur intersection étant, naturellement, une courbe plane. On demande le lieu du centre de la surface mobile.

Pour ne parler que des parties réelles du lieu, on vérifiera que :

1° Dans le cas général, on trouve une surface du sixième ordre;

2° Dans le cas où la surface fixe est de révolution, on trouve une surface de révolution, du quatrième ordre, ayant pour méridienne une conique et, de plus, un plan double;

3° Dans le cas où la surface mobile est de révolution, le lieu se compose de coniques (Concours général de 1863);

4° Si les deux surfaces sont de révolution, le lieu est une droite. (AMIGUES, J. S., 311.)

## Lieux de sommets.

*208. On donne une cyclide et une sphère; leur courbe d'intersection est une courbe du quatrième ordre, par laquelle on peut faire passer quatre cônes. Deux des sommets de ces cônes

Digitized by Google

se trouvent respectivement sur chacun des axes de la surface [1]. Lorsque le centre de la sphère est fixe et que son rayon varie, ces deux sommets décrivent les axes : quel est le lieu décrit par les sommets des deux autres cônes? (LAGUERRE, N. A., 1058.)

**209.** Le lieu des sommets des paraboloïdes hyperboliques passant par deux droites non dans un même plan est un conoïde droit; chercher ses sections par des plans parallèles à son axe. (DE SAINT-GERMAIN, N. A., 1122.)

(*Dewulf*, **74**, 444.)

**210.** Étant données deux droites non situées dans un même plan, les paraboloïdes hyperboliques qui passent par ces deux droites ont tous un plan directeur commun; trouver le lieu des sommets de ces surfaces lorsque les seconds plans directeurs passent par une troisième droite donnée non parallèle au plan des deux premières. Trouver le lieu des sommets de ces surfaces lorsque les seconds plans directeurs forment avec le premier un angle donné. (DEWULF, N. A., 1142.)

(*Moret-Blanc*, **76**, 514; **77**, 32.)

**211.** On sait que les six normales menées par un point à une surface de second ordre sont sur un même cône du second degré. On propose de trouver le lieu que doit décrire le sommet S de ce cône pour que les différents cônes obtenus admettent les mêmes plans cycliques. (GAMBEY, N. A., 1270.)

(**79**, 466.)

**212.** Étant donnés, dans l'espace, deux cercles, trouver le lieu d'un point qui soit le sommet commun de deux cônes semblables construits sur les deux cercles. (NEUBERG, M., 592.)

(*Emmerich*, **88**, 103.)

---

[1] *Voir* MANNHEIM, *Applications* (N. A., **60**, 73).
« Les axes de la cyclide sont les droites fixes par lesquelles passent respectivement les plans des lignes de courbure de chaque système. »
(*Note de Laguerre.*)

Digitized by Google

**213.** On considère une surface fixe du second degré, et une série de surfaces homothétiques du second degré circonscrites à la première. Trouver le lieu des sommets des cônes de révolution circonscrits à ces surfaces. (J. S., **20.**)

(*Barthe,* **87**, 137.)

**214.** Lieu des sommets des paraboloïdes qui passent par une parabole donnée et par deux points donnés symétriques par rapport au plan de la parabole. On distinguera les parties du lieu qui sont des sommets de paraboloïdes elliptiques et celles qui sont des sommets de paraboloïdes hyperboliques.

(Amigues, J. S., **103.**)

(*Rat,* **85**, 281.)

**215.** Une surface du second degré a un centre donné et passe par un cercle donné. Lieu des sommets. On distinguera les points du lieu suivant la nature de la surface dont ils sont les sommets. (Amigues, J. S., **104.**)

**216.** On donne deux points A et A′ et le milieu O de la droite qui les joint. On imagine toutes les surfaces de révolution du second ordre qui passent en A et A′ et dont toutes les méridiennes ont pour foyer le point O. 1° Lieu des points de contact des plans tangents perpendiculaires à AA′; 2° lieu des pôles d'un plan donné par rapport à ces surfaces; 3° en supposant l'excentricité de la méridienne donnée, on demande le lieu des pôles d'un plan donné, le lieu des sommets, le lieu des centres.

(Amigues, J. S., **138.**)

(*Martin,* **89**, 235.)

**217.** On donne deux points A et A′ et le milieu O de la droite qui les joint. On imagine toutes les surfaces de révolution du second ordre qui passent en A et en A′ et dont toutes les méridiennes ont pour foyer le point O.

1° Lieu du point de contact du plan tangent perpendiculaire à AA′;

Digitized by Google

2° Lieu des pôles d'un plan donné par rapport à ces surfaces;

3° En supposant l'excentricité de la méridienne donnée, on demande le lieu des pôles précédents, le lieu des sommets de la surface, le lieu du centre de la surface. Vérifier géométriquement les résultats simples que l'on trouvera [1].

(AMIGUES, J. S., **168**.)

(*Martin*, **89**, 235.)

---

## LIEUX GÉOMÉTRIQUES DE LIGNES.

### Lieux de droites.

**218.** Une droite est parallèle au plan d'une conique; un plan de direction donnée coupe la droite et la conique en trois points, formant les sommets d'un triangle; trouver : 1° l'équation de la surface engendrée par les côtés du triangle qui vont de la parallèle à la conique; 2° dans quel cas les sections planes de cette surface sont-elles des coniques; 3° évaluation du volume.

(WALLIS, N. A., **145**.)

(*Faure*, **52**, 189.)

**219.** Deux points matériels parcourent d'un mouvement uniforme, avec des vitesses données en grandeur et en direction, deux droites situées dans l'espace; trouver l'équation de la surface décrite par la droite variable qui passe par deux positions simultanées des points matériels. (N. A., **404**.)

(*Journeaux*, **58**, 264.)

**220.** On donne un cylindre *droit vertical;* une hélice tracée sur ce cylindre; une sphère inscrite dans ce cylindre. Une droite

---

[1] On remarquera que les deux questions 216, 217 sont pour ainsi dire identiques, ne présentant qu'une légère différence de rédaction, et font l'objet d'une solution unique.

Digitized by Google

*horizontale* se meut en s'appuyant sur l'hélice et restant tangente à la sphère inscrite; étudier la surface que la droite engendre [1]. (DEWULF, N. A., 559.)

(*Lepage*, **67**, 504.)

**221.** Quelle est la surface engendrée par une droite qui glisse sur deux autres A et B de telle sorte que, dans chacune de ses positions, l'angle qu'elle fait avec A est égal à l'angle qu'elle fait avec B. (DESGRANGES, N. A., 587.)

(*Blanché-Arrault*, **61**, 297; **62**, 139.)

**222.** Une droite glisse sur deux autres non situées dans un même plan, de telle sorte que la partie interceptée entre elles soit constamment vue sous un angle droit d'un certain point de l'espace; cette droite engendre une surface gauche du second ordre. (BOBILLIER, N. A., 623.)

(*Schnée*, **62**, 318, 379; **63**, 325.)

**223.** On donne une surface conique du second degré sur laquelle on peut placer un trièdre trirectangle; on sait qu'on peut en placer alors une infinité; par les trois arêtes de l'un de ces trièdres on mène des plans normaux à cette surface; ces trois plans se coupent suivant une même droite dont on demande le lieu, lorsqu'on déplace le trièdre sur la surface conique.

(MANNHEIM, N. A., 649.)

(*Cayla*, **66**, 40.)

**224.** Les faces d'un dièdre droit doivent rester tangentes à un ellipsoïde donné et l'arête de ce dièdre doit rencontrer deux droites fixes quelconques. On demande le lieu de cette arête.

(MANNHEIM, N. A., 1091.)

(*Genty*, **74**, 109.)

**225.** Soit

$$(1)\qquad \begin{cases} X = ax + by + cz + dt, \\ Y = a_1 x + b_1 y + c_1 z + d_1 t. \end{cases}$$

[1] On rencontre cette surface dans certains travaux.

Digitized by Google

Si $a$, $b$, $c$, $d$, $a_1$, $b_1$, $c_1$, $d_1$ sont des fonctions données d'un paramètre arbitraire, la droite mobile

$$X = 0, \qquad Y = 0$$

engendrera une surface réglée; l'équation de la surface du second ordre passant par trois droites infiniment voisines de la surface engendrée sera

$$(2) \qquad \begin{vmatrix} a & b & c & d & 0 & 0 \\ a_1 & b_1 & c_1 & d_1 & 0 & 0 \\ a' & b' & c' & d' & X & 0 \\ a'_1 & b'_1 & c'_1 & d'_1 & Y & 0 \\ a'' & b'' & c'' & d'' & 2X' & X \\ a''_1 & b''_1 & c''_1 & d''_1 & 2Y' & Y \end{vmatrix} = 0;$$

$a'$, $b'$, ..., $a'_1$, $b'_1$, ..., $a''$, $b''$, ..., $a''_1$, $b''_1$, ... sont les dérivées premières et secondes des fonctions $a$, $b$, ..., $a_1$, $b_1$, ..., par rapport au paramètre dont elles dépendent; X, Y sont définis par les égalités (1), et l'on a posé

$$(3) \qquad \begin{cases} X' = a'x + b'y + c'z + d't, \\ Y' = a'_1 x + b'_1 y + c'_1 z + d'_1 t. \end{cases}$$

(PAINVIN, N. A., **1184**.)

(*Pravaz*, **77**, 42.)

**226**. On donne un plan (P) et une droite fixe (D) qui rencontre le plan en un point O. Par la droite (D) on mène un plan ($\pi$) qui coupe (P) suivant une droite O$m$; on élève sur O$m$, dans le plan ($\pi$), une perpendiculaire O$\mu$; quel est le lieu de cette perpendiculaire? (GENTY, N. A., **1271**.)

(*Lacazette*, **78**, 473.)

**227**. Trouver le lieu des normales à un ellipsoïde, parallèles à un même plan. (BROCARD, N. C., **169**; M., **232**.)

(*Mosnat*, M., **87**, 231.)

**228**. Lorsque les extrémités d'une droite de longueur constante glissent sur deux droites de l'espace, cette droite en-

Digitized by Google

gendre une surface du quatrième ordre. Démontrer que le volume compris entre cette surface et deux plans fixes parallèles aux deux plans parallèles aux deux droites ne varie pas, lorsque les deux directrices se déplacent d'une manière quelconque dans deux plans parallèles aux plans donnés.

(Ed. Lucas, M., **63**.)

(*Jamet*, **81**, 180; **82**, 37.)

**229.** Soient OA, OB deux diamètres conjugués de l'ellipse de gorge d'un hyperboloïde. Trouver : 1° le lieu des projections de A sur les génératrices rectilignes passant par B; 2° le lieu des projetantes. (Brocard, M., **522**.)

(*Mosnat*, **90**, 121.)

**230.** On donne deux droites rectangulaires AB et CD, non situées dans un même plan; soit AC leur plus courte distance. Une droite s'appuie sur AB et CD en interceptant des segments égaux à partir de A et C. Déterminer la courbe d'intersection de la surface engendrée par cette droite avec la sphère décrite sur AC comme diamètre. (Brocard, M., **751**.)

(*Mandart*, **92**, 210.)

**231.** Trouver la surface engendrée par une droite s'appuyant constamment sur l'axe OZ, sur la droite $x = 1$, $z = 1$, et sur le cercle $z = 0$, $x^2 + y^2 = R^2$. Étudier les sections faites dans la surface par des plans parallèles aux plans de coordonnées, et particulièrement par le plan $z = h$; les sections obtenues dans ce dernier cas sont des conchoïdes de Nicomède. On propose de le démontrer géométriquement. (De Longchamps, J. M., **255**.)

(*Bonvalet*, **81**, 376.)

**232.** On donne : 1° dans le plan des $zx$ une droite parallèle à l'axe $Ox$; 2° dans le plan des $zy$ une droite parallèle à l'axe des $y$, et ne rencontrant pas l'axe des $z$ au même point que la précédente. D'un point pris dans le plan $xOy$, on abaisse des perpendiculaires sur ces deux droites, et l'on joint leurs pieds

Digitized by Google

par une ligne droite. On demande l'équation de la surface engendrée par cette droite quand le point du plan $xy$ se meut sur une courbe $f(x, y) = 0$.

Appliquer la solution au cas où $f(x, y) = 0$ est une ligne droite, et dans ce cas étudier la nature et les propriétés de la surface obtenue. (J. M., **372**.)

(*Baron*, J. S., **82**, 69.)

**233.** On donne un cercle C; par un point A de ce cercle, on élève une perpendiculaire AB à son plan. On mène une sécante AM qui coupe le cercle en M; sur AB, de part et d'autre de A, on prend AP = AP′ = AM; on mène les lignes MP et MP′ et l'on demande :

1° Le lieu des droites MP et MP′ quand le point M décrit le cercle. Sections planes parallèles au plan du cercle.

2° Par chaque point P de la droite AB il passe deux génératrices PM et PM′ de la surface. Le plan de ces génératrices coupe la surface suivant une conique dont on demande l'équation, le lieu des foyers, des centres et des sommets. (J. S., **19**.)

(*Devin*, **82**, 229.)

**234.** Soient $Ox$, $Oy$ deux droites, P un plan perpendiculaire à $Ox$ au point O. Dans le plan P, on mène une droite ON et dans le plan $NOy$ une droite OM telle que

$$\frac{\sin MON}{\sin NOy} = K;$$

trouver le lieu géométrique de la droite OM lorsque la droite ON tourne autour du point O dans le plan P. (L. Lévy, J. S., **119**.)

(*Martin*, **88**, 262.)

**235.** Étant donnée une ellipse, on peut adjoindre à tout point $f$ du segment FF′ des foyers une droite $d$ extérieure au plan de la courbe et parallèle au petit axe, telle qu'il existe un rapport constant entre les distances d'un point quelconque de l'ellipse au point $f$ et à la droite $d$. La droite $d$ engendre un cylindre



Digitized by Google

dont la section droite est une courbe semblable à l'ellipse donnée.

Trouver le théorème analogue pour l'hyperbole et la parabole. (NEUBERG, J. S., **216**.)

(*Leinekugel*, **90**, 206.)

## Lieux de courbes.

**236**. Une droite de longueur constante se mouvant entre deux droites fixes données dans l'espace, chaque point de la droite mobile décrit une ellipse; toutes les ellipses sont dans des plans parallèles; leurs centres sont sur la plus courte distance entre les droites fixes; le lieu des ellipses est une surface du quatrième degré; la droite mobile tourne à chaque instant autour d'une droite de direction constante, perpendiculaire aux deux plans parallèles déterminés par les droites fixes. (N. A., **119**.)

(*Vauquelin*, **46**, 361.)

**237**. Établir, au moyen du théorème précédent, la théorie de l'axe instantané de rotation d'un corps solide, se mouvant dans l'espace d'une manière quelconque. (N. A., **120**.)

(*Terquem*, **46**, 365.)

**238**. Trouver l'équation de la surface qui est le lieu des courbes de contact des cônes ayant un point fixe pour sommet et circonscrits aux ellipsoïdes d'un système homofocal donné. (STREBOR, N. A., **691**.)

(*Grassat*, **65**, 365.)

**239**. La surface, lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes appartenant à un système homofocal, coupe les ellipsoïdes orthogonalement. (STREBOR, N. A., **700**.)

(*Picart*, **64**, 532; **65**, 125; **68**, 118.)

**240**. Sur la surface lieu des sections circulaires diamétrales des ellipsoïdes d'un système homofocal, les trajectoires ortho-

Digitized by Google

gonales de ces cercles sont des courbes dont chacune est une ligne de courbure commune à deux hyperboloïdes homofocaux avec les ellipsoïdes. (STREBOR, N. A., 719, 726.)

(*Durrande*, **65**, 125.)

*241. On considère un hyperboloïde à deux nappes et un point de l'hyperbole focale de cette surface; on construit les différents cônes ayant pour sommet ce point et pour bases les sections circulaires de l'hyperboloïde : trouver le lieu formé par les focales de ces cônes. (LAGUERRE, N. A., 891.)

242. Une surface est engendrée par une circonférence variable, dont le plan est parallèle au plan représenté par $x+y=0$, et qui s'appuie sur les axes des $x$, des $y$ et sur la droite dont les équations sont $y=x$, $z=c$. Trouver l'équation de la surface et le volume compris entre l'origine et le plan qui a pour équation $x+y=c$. (TODHUNTER, N. C., 306; M., 576.)

(*Choisis*, M., **89**, 252.)

243. Étant donnés trois grands cercles d'une sphère ABA'B', ACA'C', BCB'C', perpendiculaires deux à deux, et la cissoïde qui, située dans le plan ABA'B', a son point de rebroussement en A et pour asymptote la tangente menée par A' au cercle ABA'B', on construit des ellipses ayant pour axes les cordes de la cissoïde et du cercle ACA'C', perpendiculaires en un même point du diamètre AA'. Démontrer : 1° que la surface engendrée par ces ellipses limite, avec le plan tangent en A' à la sphère, un volume double de celui de la sphère; 2° que la partie de cette surface qui est comprise entre A et le cercle BCB'C' divise l'hémisphère ABCB'C' en deux volumes équivalents.

(PETIT-BOIS, M., 301.)

(*Derousseau*, **84**, 229.)

244. Un ellipsoïde se déplace parallèlement à lui-même, et son centre décrit un cercle fixe. Trouver le lieu des courbes de

Digitized by Google

contact des cylindres circonscrits à l'ellipsoïde, parallèlement à une direction fixe. (BROCARD, M., 566.)

(*Stuyvaert*, **89**, 98.)

245. Étudier la surface lieu des circonférences de contact des cônes circonscrits à des sphères égales, les centres de ces sphères étant sur une droite fixe et les cônes ayant même sommet.

(BROCARD, M., 678.)

(*Denys*, **91**, 99.)

---

## ENVELOPPES.

### Enveloppes de plans.

246. On projette orthogonalement un point d'un ellipsoïde sur ses trois plans principaux; trouver l'enveloppe du plan qui passe par les trois points.

Même question pour les deux hyperboloïdes. (N. A., 402.)

(*Chanson, Challiot*, **58**, 115, 430.)

247. Sur les longueurs OA, OB, OC, données dans l'espace, on prend respectivement les points $a$, $b$, $c$; les rapports $\frac{Bb}{Aa}$, $\frac{Cc}{Aa}$ sont donnés. Trouver : 1° l'enveloppe du plan $abc$; 2° le lieu du centre de gravité du triangle $abc$. (N. A., 435.)

(*Cremona*, **59**, 199.)

248. Par un point *fixe* A pris sur l'intersection de deux plans *fixes*, on mène dans un de ces plans une droite *variable*, et dans le second plan, par le même point A, une droite perpendiculaire à la première droite; puis, toujours par le point A, une troisième droite perpendiculaire aux deux premières; démontrer que l'enveloppe du plan des deux premières droites est un cône du

Digitized by Google

second degré; et de même la surface décrite par la troisième droite.

Application à la sphère de centre A.

(MAC-CULLAGH, CAYLEY, N. A., 466.)

(*Terquem*, **59**, 205; **70**, 281.)

**249.** Quelle est l'enveloppe du plan mené perpendiculairement à l'extrémité du diamètre d'un ellipsoïde, lorsque cette extrémité décrit une circonférence? (CATALAN, N. A., 747.)

(*Duranton*, **66**, 139.)

***250.** On donne quatre surfaces fixes du second ordre passant par une même courbe gauche du quatrième ordre, ayant un point double de rebroussement :

1° Un point M se meut sur l'une d'elles; trouver le lieu du point de rencontre des plans polaires du point M par rapport à chacune des trois autres surfaces.

2° Un plan P touche l'une d'elles; trouver l'enveloppe du plan passant par les pôles du plan P relatifs à chacune des trois autres surfaces.

Dans le premier cas, on a un système de rayons ou, d'après une locution connue, une *congruence* dont il faut étudier les propriétés. (PAINVIN, N. A., 1042.)

**251.** On demande : 1° quel est le lieu du sommet d'un angle droit dont chacun des côtés rencontre deux droites données; 2° quelle est l'enveloppe du plan de cet angle droit.

(MANNHEIM, N. A., 1083.)

(*Genty*, **73**, 332.)

**252.** Trouver l'enveloppe d'un plan passant par les extrémités de trois diamètres conjugués d'un ellipsoïde. Montrer que ce lieu est le même que celui du centre de la section faite dans la surface par le plan variable. (GENTY, N. A., 1241.)

(*Chambon*, **78**, 133.)

Digitized by Google

*253. Un dièdre droit se meut de façon qu'une de ses faces passe par une droite D et que son arête décrive un plan Q. L'enveloppe de la seconde face est un cône du second degré ayant pour focales la droite D et une perpendiculaire au plan Q.

(MENNESSON, N. C., 428.)

254. Par une courbe plane fermée, on fait passer un cylindre que l'on termine à une section droite telle que le volume du cylindre compris entre cette section et la première courbe ait un volume donné. Démontrer que le plan de la section droite enveloppe un paraboloïde de révolution. (BOUBALS, M., 367.)

[*Jamet*, **87**, 194 (1).]

*255. Étant données trois droites dans l'espace, il n'est pas, en général, possible de construire un triangle ayant ses sommets respectivement sur les droites données, et tel que chacun de ses côtés soit orthogonal à la droite passant par le sommet opposé. Faire voir que, dans le cas où le problème est possible, il est indéterminé et trouver alors le lieu du centre de gravité du triangle et l'enveloppe de son plan. (J. S., 163.)

256. Étant données trois droites $a$, $b$, $c$ parallèles à un même plan, on considère tous les triangles ABC dont les sommets sont situés sur ces droites et qui ont même centre de gravité G. Démontrer que les côtés de ces triangles sont les génératrices de trois paraboloïdes et que les plans ABC enveloppent un cône de second ordre. (NEUBERG, J. S. 271.)

(*Leinekugel*, **90**, 22; **91**, 259.)

## Autres enveloppes.

*257. Un ellipsoïde de grandeur donnée est tangent aux trois faces d'un angle trièdre trirectangle. Trouver la courbe qui

(1) Généralisation.

Digitized by Google

limite la position possible d'un point de contact sur une des faces. (LEMOINE, N. A., 909.)

**258.** Trouver l'enveloppe d'une sphère tangente à une surface du second degré donnée, et coupant orthogonalement une sphère également donnée. (PELLET, N. A., **1126**.)

(*Bourguet*, **75**, 81.)

**259.** Trouver l'enveloppe d'une sphère qui coupe orthogonalement une sphère fixe donnée et qui demeure tangente à un système de trois diamètres conjugués d'une surface à centre du second degré, également donnée. (HIOUX, N. A., **1210**.)

(*Hioux*, **77**, 523; **81**, 276.)

**260.** Étant donnés cinq points dans l'espace et un plan, on demande :

1° Le lieu décrit par les sommets des cônes qui passent par les cinq points et sont tangents au plan;

2° L'enveloppe de leurs génératrices de contact avec le plan.

(GENTY, N. A., **1285**.)

(*Kœnigs*, **83**, 301.)

***261.** Étant donné un ellipsoïde, on décrit la sphère qui passe par les extrémités A, B, C de trois rayons conjugués et qui a son centre dans le plan ABC; trouver :

1° Le lieu du centre de la sphère;

2° L'enveloppe de cette sphère. (BARBARIN, N. A., **1321**.)

***262.** Un ellipsoïde de révolution se déplace en touchant les trois faces d'un trièdre trirectangle. De quelle nature est la courbe qui, sur chaque face, limite les positions du point de contact de l'ellipsoïde et du plan? (1).

(BROCARD, N. C., **161**, M., **353**.)

---

(1) La même question, étendue à un ellipsoïde quelconque, a été proposée, il y a une trentaine d'années, par M. Yvon Villarceau. Je crois qu'elle est restée sans solution. (*Note de M. Catalan.*)

*Voir* ci-dessus, n° 257.

Digitized by Google

**263.** Un paraboloïde de révolution est tangent aux trois faces d'un trièdre trirectangle. Quelle est la courbe qui, sur chaque face, limite les positions du point de contact [1]?

(BROCARD, M., 53.)

(*Pelletreau*, 83, 221.)

**264.** On donne, en coordonnées rectangulaires, l'ellipsoïde représenté par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

1° Trouver le complexe des cordes divisées en parties égales par le plan des $xy$;

2° Cône formé par celles de ces droites qui passent par un point P. Lieu du point P tel que ce cône soit de révolution;

3° Enveloppe de celles de ces droites qui sont dans le plan représenté par l'équation

$$Ax + By + Cz + D = 0;$$

4° L'enveloppe est une conique K. Lorsque D varie, on a une infinité de coniques. Lieu de leurs sommets et de leurs foyers en supposant

$$A = B = C = 1,$$

$$a = b. \quad \text{(AMIGUES, J. S., 254.)}$$

*265. On considère deux coniques S, S′, situées sur une même surface du second ordre, un plan P et un cône passant constamment par la conique S′, son sommet décrivant la conique S. La trace de chacun de ces cônes, sur le plan P, est une conique R dont on demande l'enveloppe. (LEINEKUGEL, J. S., 270.)

---

[1] La question analogue, pour un ellipsoïde quelconque, a été posée depuis longtemps. Elle est restée sans réponse.

(*Note de M. Neuberg.*)

*Voir* ci-dessus, n° 257.

Digitized by Google

# QUATRIÈME PARTIE.

# COURBES ET SURFACES.

## COURBES ET SURFACES ALGÉBRIQUES.

### Courbes gauches.

**266.** La courbe à double courbure du quatrième ordre provenant de l'intersection de deux cônes de révolution dont les axes sont parallèles est telle, que la somme des distances de chacun de ses points aux sommets des deux cônes multipliée respectivement par des constantes est constante; cette courbe, ainsi que les ovales de Descartes, a un troisième foyer.

(CHASLES, N. A., **318**.)

(*F. Lucas,* **56**, 157.)

**267.** L'arête de rebroussement de la surface développable circonscrite à deux surfaces homofocales du second ordre a pour projections, sur les trois plans principaux des deux surfaces, les développées des courbes focales. (MOUTARD, N. A., **697**.)

(*Cornu,* **65**, 121.)

***268.** Étant donnés un point quelconque $o$, et la courbe d'intersection d'une sphère et d'une surface du second ordre, le cône qui a pour sommet le point $o$ et pour directrice la courbe donnée coupe la sphère suivant une deuxième courbe située, comme la première, sur une infinité de surfaces du second ordre.

Digitized by Google

Cela posé, on demande de démontrer que les axes de chacune de ces nouvelles surfaces sont parallèles aux normales que l'on peut mener en $o$ aux trois *anallagmatiques* du quatrième ordre passant par ce point, qui ont pour *focale* la courbe donnée. (MOUTARD, N. A., 724.)

*269. Soit une courbe gauche du quatrième ordre résultant de l'intersection de deux surfaces du second degré. Il existe sur une telle courbe seize points où la torsion est nulle; si, par trois quelconques de ces points, on mène un plan, de deux choses l'une : ou ce plan passera par l'un des treize autres, ou il touchera la courbe en l'un des trois points choisis.

(LAGUERRE, N. A., 848.)

*270. Si l'on coupe un tore, ou plus généralement une cyclide, par une série de sphères ayant pour centre un point fixe donné, toutes les courbes d'intersection ainsi obtenues peuvent être placées sur un même cône du deuxième degré.

(LAGUERRE, N. A., 893.)

271. On donne une courbe gauche résultant de l'intersection de deux surfaces du second degré ayant mêmes plans de symétrie; par deux points pris sur cette courbe on mène les plans normaux. Les milieux des trois segments, interceptés sur chacun des axes de symétrie entre les deux plans normaux et le point milieu de la corde qui joint les deux points de la courbe, sont dans un même plan, et ce plan est perpendiculaire à la corde. (LAGUERRE, N. A., 974.)

(*Espanet*, 72, 461.)

*272. Déterminer le nombre des sécantes communes à deux cubiques gauches. (R. STURM, N. C., 237.)

*273. Une courbe gauche, d'ordre $n$, possède

$$\tfrac{1}{2}(n-1)(9n-12)$$

normales doubles. (EM. WEYR, N. C., 240.)

Digitized by Google

*274. Une courbe gauche, d'ordre $n$, donne lieu à $2n - 2$ normales passant par un point quelconque [1].

(Em. Weyr, N. C., 334.)

*275. Démontrer que la courbe représentée par les équations

$$x = \cos u(3\cos u + 2), \qquad y = 5\sin u\cos u,$$
$$z = \sin u(25\cos^2 u - 1)$$

a la forme d'un nœud inextricable. (Hoppe, N. C., 537.)

276. On considère une surface du second degré et une courbe gauche du troisième degré passant au centre de la surface et ayant pour directions asymptotiques les axes de cette surface. Faire voir que les normales à la surface aux six points où elle est coupée par la courbe gauche appartiennent à un même hyperboloïde. (Kœnigs, J. S., 22.)

(*Kœnigs*, **86**, 36.)

## Surfaces déterminées par des équations.

277. Discuter complètement la surface du troisième degré

$$zy^2 + Bxy + Cx^2 + Dy + Ex + F = 0. \quad \text{(Terquem, N. A., 94.)}$$

(*Brocard*, **75**, 424.)

278. Discuter la surface donnée par l'équation polaire

$$\rho^3[3\sin^2\theta\cos^2\psi + \nu(1+\mu)\sin^2\theta - 1] = \mu a^3,$$

surface à centre; trouver les longueurs des trois axes; démontrer qu'aux valeurs

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \qquad \psi = 0, \qquad \rho = a\sqrt{\frac{\mu}{2+\nu(1+\mu)}}$$

---

[1] M. Saltel (**78**, 120) affirme que cet énoncé est inexact, et que le nombre des normales menées d'un point donné à la courbe d'intersection de deux surfaces, les plus générales, d'ordres $m_1$, $m_2$ est $m_1 m_2(m_1 + m_2 - 1)$. La question mérite assurément d'être encore étudiée.

Digitized by Google

répond un point singulier de la surface, tel que le système de plans tangents qu'on peut mener par ce point forme un cône du second degré qui devient de révolution lorsque $\nu = 0$ [1].

(ROCHE, N. A., 537.)

(*Darboux*, **61**, 458.)

**279.** 1° La surface représentée par le système des trois équations

$$x = \frac{c^2 - b^2}{bc} \frac{RR'}{R + R'},$$

$$y = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c} \frac{R'\sqrt{b^2 - R^2}}{R + R'},$$

$$z = \frac{\sqrt{c^2 - b^2}}{c} \frac{R\sqrt{R'^2 - c^2}}{R + R'}$$

est une cyclide; R, R′ sont les rayons de courbure de la surface au point $x$, $y$, $z$.

2° Supposons qu'une famille de courbes situées sur cette cyclide soit représentée par l'équation différentielle

$$p\,dR + q\,dR' = 0;$$

les courbes, coupant orthogonalement celles du système donné, seront représentées par l'équation

$$\frac{dR}{pR(b^2 - R^2)} - \frac{dR'}{qR'(R'^2 - c^2)} = 0.$$

3° L'équation en coordonnées elliptiques de la cyclide dont il s'agit est

$$\rho + \mu + \nu = 0.$$ (STREBOR, N. A., **619**.)

(*Colot*, **65**, 169.)

**280.** Démontrer que : 1° les surfaces représentées par les équations

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \qquad \frac{\alpha^2}{x^2} + \frac{\beta^2}{y^2} + \frac{\gamma^2}{z^2} = 1$$

---

[1] Extrait d'un Mémoire de haute importance sur les atmosphères planétaires, et particulièrement sur les atmosphères cométaires.

(*Note de la Rédaction.*)

Digitized by Google

admettent huit points de contact, si la condition

$$\frac{\alpha}{a}+\frac{\beta}{b}+\frac{\gamma}{c}=1$$

est remplie; 2° si l'on mène, en ces points, les plans tangents, on détermine un corps dont les faces opposées sont semblables et parallèles, et dont le volume a pour expression

$$\frac{4}{3}\frac{(abc)^{\frac{3}{2}}}{(\alpha\beta\gamma)^{\frac{1}{2}}}.$$ (TODHUNTER, N. C., 304.)

(*Bombled*, **79**, 53.)

*281. Prouver que les foyers de toutes les sections centrales de la surface représentée par

$$ax^2+by^2+cz^2=1$$

se trouvent sur la surface dont l'équation est

$$\frac{(x^2+y^2+z)(1-ax^2-by^2-cz^2)}{ax^2+by^2+cz^2}$$
$$=\frac{(c-b)^2y^2z^2+(a-c)^2x^2z^2+(b-a)^2x^2y^2}{a(c-b)^2y^2z^2+b(a-c)^2x^2z^2+c(b-a)^2x^2y^2}.$$

(TODHUNTER, N. C., 305.)

*282. Démontrer que la surface de révolution représentée par les équations

$$x=\cos u\cos 2v,\qquad y=\cos u\sin 2v,$$
$$z=\sin u(\cos v-\cos u\sin v)$$

n'a qu'une seule face; c'est-à-dire qu'en cheminant sur cette surface, d'une manière continue, on peut, d'un point quelconque, aller à un autre point quelconque : par exemple, on peut passer du point $a$ au point $b$ situé sur l'autre face de la portion de surface considérée [1]. (HOPPE, N. C., 538.)

---

[1] Voir *Cremona*, **80**, 228, 263.

Digitized by Google

*283. Discuter la surface représentée par l'équation

$$x^4 - y^4 - z^4 + 4xy^2z - 2x^2z^2 + 2a^2(y^2 + 2xz) - 4a(x^2 + z^2)y - a^4 = 0.$$

(CATALAN, J. S., **120**.)

*284. Discuter la surface représentée par

$\Sigma z(z-1)(x+y)(x+1)(y+1) = 0$ (1). (CATALAN, J. S., **200**.)

## Surfaces de génération géométrique.

285. Tout plan, doublement tangent à la surface engendrée par une conique tournant autour d'une droite située dans son plan, la coupe suivant deux coniques dont les projections, sur un plan perpendiculaire à l'axe de rotation, ont un foyer commun au pied de l'axe. (MOUTARD, N. A., **497**.)

(*Kessler*, **61**, 275; **64**, 36.)

286. La surface de révolution engendrée par une ellipse de Cassini tournant autour de son axe non focal est coupée par un plan bitangent suivant deux cercles.

En général, si l'on coupe le tore par un plan parallèle à l'axe du tore, la surface engendrée par la révolution de la section plane ainsi obtenue autour de son axe (parallèle à celui du tore) sera coupée par un plan bitangent suivant deux cercles.

(DARBOUX, N. A., **751**.)

(*A. Lévy*, **67**, 73.)

*287. On donne deux surfaces du second degré homofocales, A et B, et un plan fixe P. Par une droite quelconque D du plan P, on mène des plans tangents aux deux surfaces A et B. En joignant deux à deux les points de contact qui ne se trouvent pas

(1) Cette surface, située de la même manière relativement aux trois plans coordonnés, admet *neuf* droites au moins. En outre, elle admet une circonférence imaginaire, etc.

Digitized by Google

sur la même surface, on obtiendra quatre droites. Lorsque la droite D se déplace d'une façon quelconque dans le plan P, toutes les droites ainsi obtenues sont normales à une même surface, qui est une anallagmatique de quatrième ordre.

De quelle façon doit se déplacer la droite D dans le plan P, pour que les droites correspondantes forment une surface développable? (LAGUERRE, N. A., 846.)

*288. Une sphère variable coupe le plan d'une conique suivant un cercle fixe; la développable circonscrite à cette sphère et à la conique a trois lignes doubles, outre la conique fixe. Chacune de ces lignes doubles, qui est une conique, décrit, lorsque la sphère varie, une surface du second degré ayant pour focale la conique donnée (1). (LAGUERRE, N. A., 892.)

289. En un point M d'un tore, on mène une droite MT située dans le plan tangent. Soient $a$ et $b$ les points où cette droite coupe la surface; menons les deux sphères qui, passant par M, touchent la surface aux points $a$ et $b$. Désignons par $\alpha$ et $\beta$ les centres de ces sphères, et par I le point milieu du segment $\alpha\beta$.

Cela posé, si, par le point M, nous menons une droite parallèle à la droite qui joint le point I au centre du tore, dirigée dans le même sens et de longueur double, le point extrême de cette droite est le centre de courbure de la section faite dans le tore par le plan normal passant par MT.

(LAGUERRE, N. A., 1057.)

(*Doucet*, 73, 470.)

290. Considérons le cône circonscrit à une surface du troisième ordre à quatre nœuds S (2), et ayant pour sommet un

(1) M. Chasles a démontré que les trois coniques doubles dont il s'agit sont sur trois surfaces homofocales. (*Note de la Rédaction.*)

(2) Cette surface est la réciproque de la surface romaine de Steiner. Son équation peut se mettre sous la forme

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{y}+\frac{C}{z}+\frac{D}{u}=0.$$

(*Note de la Rédaction.*)

Digitized by Google

point M de cette surface; ce cône se décompose en deux cônes du second degré, dont chacun touche S le long d'une cubique gauche. Les surfaces développables, dont ces cubiques sont les arêtes de rebroussement, coupent S suivant les deux lignes asymptotiques qui se croisent au point M.

(LAGUERRE, N. A., **1154**.)

(*Gambey*, **76**, 516.)

### Autres questions sur les surfaces algébriques.

**291**. Trouver l'équation d'une surface algébrique sur laquelle on ne puisse tracer qu'une seule et unique droite. (N. A., **31**.)

(*Roche, Breton de Champ*, **42**, 474; **49**, 61, 130.)

**292**. Si d'un point situé sur une surface algébrique de degré $m$, on abaisse des perpendiculaires sur un système de plans fixes, le lieu géométrique des points de moyenne distance des pieds des perpendiculaires est une surface algébrique du même degré $m$ [1]. (N. A., **34**.)

(*Jullien, Brisse*, **52**, 80; **78**, 39.)

**293**. Si d'un point situé sur une surface algébrique du degré $m$, on abaisse des perpendiculaires sur un système de $n$ droites, le centre de moyenne distance des pieds des perpendiculaires est sur une surface aussi de degré $m$; si le point est sur une ligne d'intersection de deux surfaces des degrés $m$ et $p$, le centre de moyenne distance des pieds des perpendiculaires est aussi sur l'intersection de deux surfaces des mêmes degrés, $m$ et $p$. (N. A., **60**.)

(*Jullien*, **52**, 80.)

**294**. Trouver une surface algébrique sur laquelle on ne puisse tracer qu'une seule et unique circonférence. (N. A., **54**.)

(*Roche*, **43**, 37.)

---

[1] *Voir* la question suivante.

Digitized by Google

**295.** *abcd*, ABCD étant deux tétraèdres, les six sommets *b*, *c*, *d*, B, C, D sont fixes; on a la relation

$$\frac{ab}{AB} = \frac{ac}{AC} = \frac{ad}{AD} = \text{const.}$$

Si le sommet *a* décrit une surface algébrique de degré pair, et divisée par le plan *bcd* en deux parties égales et symétriques, le sommet A décrit une surface de même degré.

(JACOBI, N. A., **171**.)

(*P. Serret*, **48**, 101.)

**296.** $u = 0$ est l'équation rendue homogène d'une surface de degré $m$ entre quatre variables. Lorsque le déterminant de la fonction est *identiquement* nul, l'équation représente un cône.

(HESSE, N. A., **286**.)

(*Faure, Brioschi*, **54**, 398, 402.)

**297.** Sur toute surface du troisième degré, on peut trouver vingt-sept droites. (N. A., **376**.)

(*De Jonquières*, **59**, 129.)

***298.** Par un point pris arbitrairement dans l'espace, on peut, en général, mener $\frac{mp(m-1)(p-1)}{2}$ droites, dont chacune rencontre en deux points la ligne à double courbure résultant de l'intersection de deux surfaces algébriques d'ordre $m$ et $p$; toutes ces droites sont sur un cône d'ordre $(m-1)(p-1)$.

Il suit de là que, la perspective de l'intersection de deux surfaces d'ordre $m$ et $p$ a $\frac{mp(m-1)(p-1)}{2}$ points doubles situés sur une courbe d'ordre $(m-1)(p-1)$.

(MOUTARD, N. A., **496**.)

**299.** $C_1$, $C_2$, $C_3$ sont trois cônes de *même* degré ayant leurs trois sommets sur la *même* droite; $C_1$ coupe $C_3$ suivant une courbe *plane*, $C_2$ coupe $C_3$ suivant une courbe *plane*, $C_1$ et $C_2$



Digitized by Google

se couperont aussi suivant une courbe *plane*, et les trois plans passent par la *même* droite. (STEINER, N. A., 556.)

(*Busco*, **66**, 273, 276.)

*300. Théorème concernant les surfaces d'un ordre quelconque (à démontrer par des considérations de pure Géométrie) :

Parmi les surfaces de degré $n$ qui forment un faisceau donné, il y en a, en général [1],

$$m[(m+2n-3)^2-(n-1)(n-2m-3)]$$

qui touchent une surface donnée du degré $m$.

Par exemple, dans un faisceau de surfaces du degré $n$, il y en a $3(n-1)^2$ qui touchent un plan donné.

(DE JONQUIÈRES, N. A., 643.)

301. Les points milieux des vingt-huit droites, qui joignent deux à deux les centres des huit sphères inscrites dans un tétraèdre quelconque, sont sur une même surface du troisième ordre qui contient toutes les arêtes du tétraèdre.

(BELTRAMI, N. A., 663.)

[*Picquet, Cornu*, **64**, 225, 367; **66**, 317 [2].]

302. La surface développable qui a pour arête de rebroussement une courbe gauche unicursale, d'ordre $n$, est, elle-même, d'ordre $2n-2$. Le nombre de plans tangents menés à cette surface, d'un point de l'espace, est $3(n-2)$.

(JAMET, N. C., 407.)

---

[1] *En général*, c'est-à-dire si la surface $S_m$ n'a ni ligne nodale, ni ligne de rebroussement, etc.

[2] Généralisation.

Digitized by Google

# COURBES ET SURFACES EN GÉNÉRAL.

## Courbes.

*303. Soient

$$(1)\quad \begin{cases} a_1x + a_2y + a_3z + a_4w = 0 & \text{ou} \quad A = 0, \\ b_1x + b_2y + b_3z + b_4w = 0 & \text{ou} \quad B = 0, \\ c_1x + c_2y + c_3z + c_4w = 0 & \text{ou} \quad C = 0 \end{cases}$$

les équations de trois plans.

Si les coefficients $a_1$, $b_1$, $c_1$, $a_2$, $b_2$, $c_2$, ... sont des fonctions d'un paramètre variable $t$, le plan d'intersection de ces trois plans décrira une courbe.

Démontrer que le plan osculateur de cette courbe au point $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$ a pour équation

$$\begin{vmatrix} A & B & C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a'' & b'' & c'' & 2a'_1 & 2b'_1 & 2c'_1 & a_1 & b_1 & c_1 \\ a''_2 & b''_2 & c''_2 & 2a'_2 & 2b'_2 & 2c'_2 & a_2 & b_2 & c_2 \\ a''_3 & b''_3 & c''_3 & 2a'_3 & 2b'_3 & 2c'_3 & a_3 & b_3 & c_3 \\ a''_4 & b''_4 & c''_4 & 2a'_4 & 2b'_4 & 2c'_4 & a_4 & b_4 & c_4 \\ 2a'_1 & 2b'_1 & 2c'_1 & a_1 & b_1 & c_1 & 0 & 0 & 0 \\ 2a'_2 & 2b'_2 & 2c'_2 & a_2 & b_2 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ 2a'_3 & 2b'_3 & 2c'_3 & a_3 & b_3 & c_3 & 0 & 0 & 0 \\ 2a'_4 & 2b'_4 & 2c'_4 & a_4 & b_4 & c_4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0;$$

A, B, C sont définis par les équations (1); $a'_1$, $b'_1$, $c'_1$, ..., $a''_1$, $b''_1$, $c''_1$, ... sont les dérivées premières et les dérivées secondes des coefficients $a_1$, $b_1$, $c_1$, ... par rapport à $t$.

(Genty, N. A., 1206.)

304. Trouver les trajectoires orthogonales d'une sphère de rayon constant dont le centre parcourt une ligne droite.

(L. Lévy, N. A., 1607.)

(*Dertoux*, 91, 31*.)

Digitized by Google

**305.** Démontrer, par des considérations géométriques et par le calcul, que les trajectoires orthogonales d'une sphère de rayon constant, dont le centre parcourt une circonférence, sont des courbes sphériques. (L. Lévy, N. A., **1608.**)

(*Dertoux,* **91**, 32*.)

***306.** Chercher les courbes telles que les plans polaires de leurs points, par rapport à une sphère donnée, passent par les centres des sphères osculatrices correspondantes.

(Cesaro, N. A., **1631.**)

**307.** 1° Discuter la courbe représentée par

$$x = e^t, \qquad y = e^{-t}, \qquad z = t\sqrt{2}.$$

2° Prouver que cette courbe est une hélice caténoïdique.

3° Prouver que l'ombre de cette hélice, sur un certain plan, est une hyperbole équilatère. (Catalan, N. C., **28.**)

(**79**, 202.)

**308.** Si l'on mène les plans osculateurs aux points où une hélice est rencontrée par un plan P, tous ces plans rencontrent P en un même point M, et si le plan P tourne autour d'une droite, le point M décrit une autre droite. (Reye, N. C., **181.**)

(*Dewulf,* **77**, 88.)

**309.** En chaque point M d'une courbe à double courbure, il existe trois droites formant un trièdre trirectangle; savoir : la tangente, la normale principale et la binormale.

Une droite passant par le point M et liée invariablement à ce trièdre n'engendre une surface développable que si elle se confond avec la tangente, ou si la courbe est une hélice. Dans le second cas, une infinité de droites, passant par le point M et liées invariablement au trièdre, engendrent des hélicoïdes développables. Ces droites sont sur un cône du second degré, passant par la tangente, et dont les sections circulaires sont dans des plans perpendiculaires à cette tangente. (Appell, N. C., **532.**)

(*Cesaro,* **80**, 188.)

Digitized by Google

## Surfaces réglées.

*310. Soit un cylindre circonscrit à une surface de *révolution;* de chaque point de la ligne de contact on abaisse des perpendiculaires sur l'axe; on obtient une surface gauche; circonscrivons à cette surface un second cylindre; coupant les deux cylindres par un plan, la section du second cylindre est la développée de la section du premier cylindre. (DUNESME, N. A., 592.)

*311. Un cylindre étant circonscrit à une surface de révolution engendrée par une sinusoïde, la courbe de contact est une hélice dont la projection sur un méridien est aussi une sinusoïde semblable à la courbe méridienne; le rapport de similitude est $\frac{1}{2}$; la section du cylindre par un plan est une cycloïde; opérant comme dans la question précédente, la courbe de contact sur la surface gauche est encore une hélice égale à la première hélice. (DUNESME, N. A., 593.)

312. Deux surfaces gauches ayant une génératrice commune sont telles que leurs deux plans tangents communs se coupent à angle droit. Démontrer que, pour la génératrice commune, le plan central [1] de l'une touche l'autre au point où le plan central de celle-ci touche la première. (MANNHEIM, N. A., 823.)

(*Pellet,* **68**, 332.)

313. On circonscrit à une surface de vis à filet carré une surface développable dont les divers plans tangents sont parallèles aux plans tangents à un cône du second degré; la projection de la courbe de contact sur un plan perpendiculaire à l'axe de l'hélicoïde est une podaire de conique. (LAGUERRE, N. A., 865.)

(*Wickersheime,* **69**, 134.)

314. Lieu des centres de courbure principaux correspondants

---

[1] Le plan central est le plan tangent au point central.

Digitized by Google

aux points d'une surface gauche qui sont situés sur une génératrice. (DARBOUX, N. A., **870**.)

(*Brocard*, **69**, 463; **70**, 44.)

**315.** En faisant tourner d'un même angle et dans le même sens les génératrices d'une surface gauche autour de leur point central et dans leur plan central, on obtient une nouvelle surface gauche qui a la même ligne de striction que la première.
(FOURET, N. A., **1014**.)

(*Pellet*, **71**, 520.)

*316. Construire une surface gauche ayant pour ligne de striction une courbe donnée et pour cône directeur un cône de révolution également donné. (FOURET, N. A., **1015**.)

**317.** Déterminer les sommets et les arêtes d'une surface gauche ayant pour ligne de striction une courbe donnée et pour cône directeur un cône de révolution également donné.
(FOURET, N. A., **1016**.)

(*Pellet*, **71**, 520.)

**318.** On donne un cylindre droit à base circulaire et une hélice tracée sur ce cylindre : trouver la longueur d'un arc d'hélice tel que les tangentes menées à ses extrémités se rencontrent.
(DUPAIN, N. A., **1033**.)

(*Pellissier*, **74**, 294.)

**319.** Deux surfaces gauches données $S_1$ et $S_2$ ont une génératrice commune A.

Déterminer leurs points de contact sur A.

$S_1$ restant fixe, on donne à $S_2$ un double mouvement de translation parallèlement à A et de rotation autour de cette droite : quelle sera la position des points de contact au bout d'un temps donné $t$? (DEWULF, N. A., **1152**.)

(*Moret-Blanc*, **76**, 36.)

Digitized by Google

*320. Démontrer que les droites joignant le sommet d'un cône aux centres des sphères osculatrices d'une trajectoire oblique des génératrices sont rencontrées et partagées dans un rapport constant par les rectifiantes de la trajectoire.

(CESARO, N. A., 1586.)

*321. Soit B le centre de la sphère osculatrice, en A, à la ligne (A). Soit C le centre de la sphère osculatrice, en B, à la ligne (B).

Démontrer que AC engendre une surface développable, et chercher les lignes pour lesquelles AC pivote autour d'un point fixe. (CESARO, N. A., 1629.)

*322. Étudier le complexe des droites D dont les distances à deux droites données L et L′ ont un rapport constant K. Examiner en particulier le cas où les droites L et L′ se coupent à angle droit et celui où ces droites sont parallèles.

(SCHOUTE, N. A., 1564.)

## Autres questions sur les surfaces en général.

323. Construire la surface

$$e^z = \frac{\cos x}{\cos y}.$$

($e$ = base népérienne). (CATALAN, N. A., 313.)

(*Dupain*, **62**, 163.)

324. Deux plans P, P′ coupant une surface S suivant deux courbes I, I′, la projection de la courbe I sur le plan P′ sera tangente à la courbe I′ aux points où la trace de P sur P′ pourra couper I′, si les coordonnées de ces points satisfont à l'équation

$$D_z F = 0,$$

Digitized by Google

déduite de l'équation

$$F(x, y, z) = 0$$

de S, par rapport à trois axes rectangulaires, dont deux, sur lesquels on compte $x$ et $y$, doivent être dirigés dans le plan P'.

(La condition $D_z F = 0$, nécessaire et suffisante pour le contact dont il s'agit, est remplie pour les surfaces du second ordre lorsque P' est un plan principal.) (Dieu, N. A., 319.)

(*Challiot*, **57**, 385; **58**, 82.)

**325.** Écrire l'équation d'un faisceau de surfaces qui passent par le point $(x', y', z')$ et par l'intersection des deux surfaces

$$f(x, y, z) = 0,$$
$$\varphi(x, y, z) = 0. \quad \text{(N. A., 403.)}$$

(*Chanson, Challiot*, **58**, 117, 191.)

**326.** On donne deux surfaces (S), (S'), la première fixe, l'autre se rapprochant indéfiniment de celle-ci. D'un point A de (S) et dans le plan tangent à cette surface on mène des tangentes à (S'). Quelle est la limite des positions de ces tangentes lorsque (S') tend vers (S), de façon que le point où (S') est touchée à chaque instant par un plan parallèle au plan tangent mené par le point A à (S) décrive une ligne qui coupe cette surface sous un angle fini? (Ossian Bonnet, N. A., 805.)

**327.** Par une droite tangente à une surface quelconque en un point M, on mène différents plans sécants; on construit pour chacune des sections que ces plans déterminent dans la surface la parabole qui suroscule la section au point $m$; le lieu des foyers de ces paraboles est un cercle. (Laguerre, N. A., 847.)

(*Doucet*, **68**, 417.)

**328.** Trois points d'une droite décrivent chacun une surface

Digitized by Google

déterminée; tout point M de cette droite décrit en même temps une autre surface. Si, pour une position déterminée de la droite, on mène les normales aux surfaces décrites par chaque point, toutes ces normales appartiennent à un hyperboloïde.

(MANNHEIM, N. A., 917.)

(*Fouret*, **70**, 330.)

*329. Soient (A) et (A′) deux surfaces dont l'une est la transformée de l'autre par rapport à un pôle O, c'est-à-dire que les points correspondants de ces surfaces se trouvent sur une même droite passant par le point fixe O.

On demande de démontrer :

1° Que dans ce mode de transformation les surfaces liées par la relation

$$f(r, r') = 0,$$

où $f$ est une fonction quelconque des distances

$$OM = r, \qquad OM' = r',$$

jouissent seules de la propriété que leurs normales aux points correspondants se rencontrent en un même point de l'espace; comme une des applications, on peut considérer les surfaces conchoïdes $r - r' = \pm$ const.;

2° Que parmi les transformations définies par la relation générale $f(r, r') = 0$, il n'y a que l'homothétie et l'inversion qui jouissent de la propriété de faire correspondre les lignes de courbure des surfaces transformées. (HABICH, N. A., 946.)

**330.** Trouver une surface (M) telle, qu'abaissant d'un point M de (M) une perpendiculaire MP sur un plan (P), et menant par P une parallèle PN à la normale en M à (M), les droites ainsi obtenues soient normales à une surface.

(RIBAUCOUR, N. A., 1053.)

(*Pellet*, **74**, 440.)

**331.** Si deux surfaces S et Σ se correspondent point par point, suivant une loi déterminée, et si $o$, $a$, $b$, $c$ sont quatre points

Digitized by Google

infiniment voisins de la première S et $\omega$, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ les quatre points correspondants de la seconde $\Sigma$, on a les analogies

$$\frac{oa}{\sin boc} : \frac{\omega\alpha}{\sin \beta\omega\gamma} = \frac{ob}{\sin coa} : \frac{\omega\beta}{\sin \gamma\omega\alpha} = \frac{oc}{\sin aob} : \frac{\omega\gamma}{\sin \alpha\omega\beta}.$$

(ROUCHÉ, N. A., **1619**.)

(*Genty*, **92**, 27*.)

*332. On considère, sur une surface, les courbes enveloppées par des plans normaux parallèles à une direction donnée. Si ces courbes forment un réseau orthogonal avec celles le long desquelles la normale fait un angle constant avec la direction donnée, la surface a une série de lignes de courbure situées dans des plans perpendiculaires à la susdite direction.

(L. LÉVY, N. A., **1624**.)

*333. Soient M, O les points de contact de deux plans parallèles, tangents à deux surfaces données (M), (O). La normale en O, à la surface (O), et la droite MO déterminent un plan qui enveloppe une troisième surface (C), qu'il touche en un point C. Soit ON le rayon MO après sa réflexion sur (O). Trouver le plan tangent au lieu du point N.

Généraliser le résultat en supposant que les plans tangents en M, O, à (M), (O) se coupent toujours sur un plan fixe.

(RIBAUCOUR, N. C., **527**.)

**334**. Soit

$$F(x, y) + f(z) = 0$$

l'équation d'une surface S, $F(x, y)$ étant une fonction homogène. Si, à S, on circonscrit un cône, dont le sommet appartienne à l'axe $Oz$, la courbe de contact est plane.

(CATALAN, M., **270**.)

(*Cesaro*, **78**, 45.)

Digitized by Google

# NOTES SUR DEUX QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A DEUX DIMENSIONS.

Au sujet de la question 193 du Volume précédemment publié, et qui contient les énoncés relatifs à la Géométrie analytique à deux dimensions, nous avons reçu de M. Maurice d'Ocagne une lettre dont nous détachons l'extrait suivant :

Cette question, qui a été publiée dans les *Nouvelles Annales* sous le n° 1617, est ainsi énoncée :

*Si les normales à une parabole aux points* A, B, C *concourent en un même point* P, *et que les normales* PA, PB, PC *rencontrent la parabole en* A′, B′, C′, *les cercles décrits sur* PA′, PB′ *et* PC′ *comme diamètres sont tangents respectivement à* BC, CA, AB. *En outre, si* $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ *sont les points de contact correspondants, les droites* A′$\alpha$, B′$\beta$, C′$\gamma$ *sont tangentes à la parabole en* A′, B′, C′.

Je l'avais obtenue en réduisant au cas de la parabole certaine propriété, d'ailleurs parfaitement exacte, qui figure dans un de mes Mémoires de l'*American Journal*. En opérant cette réduction, je commis une erreur dont je ne m'aperçus malheureusement qu'après que la question eut été publiée. J'en avisai aussitôt la Rédaction des *Nouvelles Annales;* on s'empressa de me répondre que la rectification serait faite lors de la publication de la solution. Toute personne recherchant cette solution se serait, en effet, immédiatement aperçue de la modification à introduire dans l'énoncé; en cherchant les équations des droites unissant le point A′, par exemple, au point de rencontre de BC et du cercle PA′, on trouve, au lieu de la tangente A′$\alpha$ à la parabole, *solution double,* cette tangente, *solution simple,* et le diamètre passant par A′.

J'ai d'ailleurs publié l'énoncé correct de cette propriété dans les *Nouvelles Annales* elles-mêmes (août 1892, p. 329, t. III), où la démonstration est en outre donnée.

Je vous serais bien reconnaissant, dans le prochain Volume de votre *Recueil de problèmes,* d'insérer, soit une Note rectificative,

Digitized by Google

soit la présente lettre elle-même. C'est, à mon avis, ce qu'il y a de mieux à faire pour éviter aux lecteurs les ennuis d'une recherche infructueuse.

Veuillez, etc.

M. D'OCAGNE.

Paris, 3 novembre 1892.

Nous ne pouvons que remercier M. d'Ocagne de cette rectification, que nous insérons ici avec empressement, comme il le désire. Son énoncé, avec les modifications qu'il indique, n'en constitue pas moins un exercice fort intéressant, malgré la très légère erreur commise par lui en effectuant la réduction au cas de la parabole, ainsi qu'il l'a indiqué ci-dessus.

---

D'autre part, M. Fouret nous adresse, à propos de la question n° 398 (Volume précité, p. 101), question publiée dans les *Nouvelles Annales* sous le n° 1109, l'énoncé rectifié que voici :

*Par les sommets d'un triangle pris deux à deux on fait passer trois paraboles ayant un point de contact commun et dont les diamètres passant par ce point rencontrent les côtés correspondants du triangle et non leurs prolongements. Les droites qui joignent ces points de rencontre aux sommets opposés du triangle concourent en un même point.*

FIN.

Digitized by Google

# TABLE DES MATIÈRES.

Pages.

AVERTISSEMENT..... V

Abréviations et renvois..... VII

Observation spéciale au présent Volume..... IX

PREMIÈRE PARTIE.

FIGURES RECTILIGNES OU SPHÉRIQUES.

**Figures rectilignes.**

Numéros.

1-16. — Points, droites et plans..... 1

17-23. — Polyèdres..... 7

**Figures sphériques.**

24-33. — Géométrie sphérique..... 9

34-44. — Sphère; questions diverses..... 12

DEUXIÈME PARTIE.

COURBES ET SURFACES DU SECOND ORDRE.

45-54. — Coniques dans l'espace..... 16

55-63. — Cônes et cylindres..... 19

64-77. — Un ellipsoïde..... 21

78-84. — Plus d'un ellipsoïde..... 25

85-101. — Hyperboloïdes..... 26

102-106. — Paraboloïdes..... 30

Digitized by Google

Numéros. Pages.
107-113. — Quadriques de révolution ..... 31
114-127. — Une quadrique en général; pôles et plans polaires ..... 33
128-147. — Une quadrique en général; autres questions ..... 37
148-156. — Plus d'une quadrique ..... 43

---

## TROISIÈME PARTIE.

## LIEUX GÉOMÉTRIQUES ET ENVELOPPES.

### Lieux géométriques de points.

157-173. — Relatifs à des figures rectilignes ..... 47
174-188. — Relatifs à des quadriques ..... 51
189-193. — Autres générations ..... 54
194-207. — Lieux de centres et de foyers ..... 55
208-217. — Lieux de sommets ..... 58

### Lieux géométriques de lignes.

218-235. — Lieux de droites ..... 61
236-245. — Lieux de courbes ..... 66

### Enveloppes.

246-256. — Enveloppes de plans ..... 68
257-265. — Autres enveloppes ..... 70

---

## QUATRIÈME PARTIE.

## COURBES ET SURFACES.

### Courbes et surfaces algébriques.

266-276. — Courbes ..... 73
277-284. — Surfaces déterminées par des équations ..... 75

Digitized by Google

Numéros. Pages.
285-290. — Surfaces de génération géométrique ..... 78
291-302. — Autres questions sur les surfaces algébriques ..... .. 80

## Courbes et surfaces en général.

303-309. — Courbes ..... 83
310-322. — Surfaces réglées ..... 85
323-334. — Autres questions sur les surfaces en général ..... 87

NOTES ..... 91

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES

18763 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

FEB 7 1898

Digitized by Google

3 2044 079 96

Digitized by Google